Exercices et Projets d'Électrotechnique

PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE

Eric GERARD
DIRECTEUR DE L'INSTITUT ÉLECTROTECHNIQUE MONTEFIORE

ET

Omer DE BAST
SOUS-DIRECTEUR DE CET INSTITUT

TOME PREMIER

Applications de la Théorie de l'Électricité et du Magnétisme

Avec 96 figures dans le texte

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEURS
Quai des Grands-Augustins, 55

1907

Liége — Imprimerie *La Meuse* (Société anonyme)

PRÉFACE

Nous commençons aujourd'hui la publication d'une série d'exercices et de projets d'électrotechnique posés aux élèves de l'Institut Montefiore comme application des cours qui leur sont enseignés.

Le présent volume contient les problèmes dont l'examen peut être abordé avec la seule connaissance des théories générales de l'électricité et du magnétisme. La plupart se rattachent directement à des questions d'ordre pratique, que le lecteur familiarisé avec les emplois industriels de l'énergie électrique n'aura pas de peine à reconnaître.

Une centaine d'exercices gradués permettent de passer en revue les théorèmes fondamentaux du magnétisme et de l'électrostatique, de mettre en usage les lois du courant électrique, d'élucider les règles et formules de l'électromagnétisme et de l'induction électromagnétique. Une large part a été réservée au calcul des grandeurs alternatives par le procédé graphique et la méthode symbolique.

Dans les énoncés, les valeurs numériques des quantités ont été le plus souvent indiquées en unités hétérogènes, afin de fournir de nombreux exemples de transformations d'unités.

Nous avons eu pour objectif principal, en rédigeant ces notes, de faciliter la tâche de l'étudiant électricien ; mais nous nous plaisons à croire que le technicien pourra également y trouver des renseignements utiles.

Ultérieurement paraîtront les exercices et projets relatifs aux machines et installations électriques.

LES AUTEURS.

Février 1907.

Chapitre I.

MAGNÉTISME.

1. — *Un aimant supposé uniforme, dont l'intensité d'aimantation est égale à 300 unités C. G. S., présente une longueur de 1 décimètre et une section carrée de 100 millimètres carrés. Sachant que cet aimant pèse 78 grammes et, qu'en oscillant, autour de son centre de gravité, sous l'influence du champ magnétique terrestre, il effectue 14 oscillations complètes par minute, calculer la valeur en unités C. G. S. de l'intensité du champ magnétique terrestre.*

La période d'oscillation T est liée au moment d'inertie Ω de l'aimant, au moment magnétique $\mathfrak{M}$ de celui-ci et à l'intensité $\mathcal{H}$ du champ magnétique terrestre par la formule

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Omega}{\mathfrak{M}\,\mathcal{H}}},$$

d'où l'on tire

$$\mathcal{H} = \frac{4\pi^2\,\Omega}{\mathfrak{M}\,T^2}.$$

Mais, si $\mathcal{J}$ est l'intensité d'aimantation de l'aimant, v son

volume, m sa masse, b sa longueur et a le côté de sa section carrée, on a

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{J} v \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{m}{12}(b^2 + a^2).$$

Avec

$$\mathfrak{A} = 300 \,.\, 10 = 3000 \text{ unités C. G. S.,}$$

$$T = \frac{60}{14} = 4,28 \text{ secondes,}$$

$$\Omega = \frac{78}{12}(10^2 + 1^2) = 650 \text{ grammes masse-cm}^2,$$

on trouve

$$\mathcal{H} = \frac{4 \,.\, 3,14^2 \,.\, 650}{3000 \,.\, 4,28^2} = 0,465 \text{ gauss.}$$

2. — *Une aiguille aimantée, dont la masse polaire $m = 50$ unités C. G. S. et dont la longueur vraie mesure 200 millimètres, est disposée au centre d'un aimant uniforme tubulaire, suivant l'axe de celui-ci. Abstraction étant faite du champ magnétique terrestre et des frottements, évaluer en joules le travail effectué en retournant cette aiguille bout pour bout, sachant que l'aimant tubulaire a une longueur $L = 0,6$ mètre, que les rayons des circonférences concentriques qui limitent sa section droite sont $R = 2$ décimètres et $r = 1,5$ décimètre, et que, lorsqu'il oscille, dans un champ magnétique uniforme exerçant sur l'unité C. G. S. de pôle magnétique une force de 4,78 milligrammes, autour d'un axe de rotation passant par son centre de gravité, normal à son axe magnétique ainsi qu'à la direction du champ et par rapport auquel son moment d'inertie Ω est égal à 11,7 unités dérivées du kilogramme-masse et du mètre, il effectue 4,25 oscillations complètes par minute.*

T étant la durée d'une oscillation complète de l'aimant tubulaire dans le champ uniforme d'intensité $\mathcal{H}$, on peut déduire le moment magnétique de cet aimant de la formule

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Omega}{\mathfrak{A}\mathcal{H}}}.$$

En faisant

$$T = \frac{60}{2,45} = 24,5 \text{ secondes},$$

$$\Omega = 11,7 \,.\, 10^3 \,.\, 10^4 = 117000000 \text{ grammes masse-cm}^2,$$

$$\mathcal{H} = 4,78 \,.\, 10^{-3} \,.\, 981 = 4,69 \text{ gauss},$$

on trouve

$$\mathfrak{M} = \frac{4 \,.\, 3,14^2 \,.\, 117000000}{24,5^2 \,.\, 4,69} = 1650000 \text{ unités C. G. S.}$$

Il s'ensuit que la densité des pôles de l'aimant vaut

$$\sigma = \frac{\mathfrak{M}}{L \,.\, \pi(R^2 - r^2)} = \frac{1650000}{60 \,.\, 3,14\,(20^2 - 15^2)} = 50 \text{ unités C. G. S.}$$

Cherchons les potentiels magnétiques aux points du champ de l'aimant tubulaire où se trouvent les pôles de l'aiguille aimantée. A cet effet, remarquons que le potentiel magnétique dû à un disque annulaire uniformément chargé d'agent à la

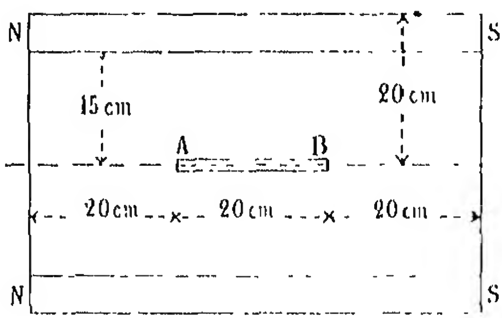

Fig. 1.

densité σ et limité par deux circonférences concentriques de rayons R et r, a pour expression, en un point situé sur l'axe de symétrie du disque à une distance a du centre de figure de celui-ci,

$$\mathcal{V} = 2\pi\sigma\left(\sqrt{R^2 + a^2} - \sqrt{r^2 + a^2}\right).$$

Si A et B représentent, dans la fig. 1, les positions occupées, dans l'aimant tubulaire, par les extrémités de l'aiguille

aimantée, le potentiel au point A, égal à la somme des potentiels dus en ce point aux pôles N et S de l'aimant, est

$$\mathcal{V}_A = 2\pi(+150)\left(\sqrt{20^2+20^2} - \sqrt{15^2+20^2}\right)$$
$$+ 2\pi(-150)\left(\sqrt{20^2+40^2} - \sqrt{15^2+40^2}\right)$$
$$= +1\,225 \text{ unités C. G. S.}$$

Au point B, le potentiel est évidemment

$$\mathcal{V}_B = -1\,225 \text{ unités C. G. S.}$$

Avant le retournement, quand l'aiguille avait son pôle nord en B, son énergie potentielle dans le champ de l'aimant était

$$(+m)\mathcal{V}_B + (-m)\mathcal{V}_A$$
$$= (+50)(-1\,225) + (-50)(+1\,225) = -122\,500 \text{ ergs.}$$

Après le retournement, cette énergie devient

$$(+m)\mathcal{V}_A + (-m)\mathcal{V}_B = +122\,500 \text{ ergs.}$$

Sa variation

$$2 \,.\, 122\,500 = 245\,000 \text{ ergs ou } 245\,000 \,.\, 10^{-7} = 0{,}0245 \text{ joule}$$

représente le travail cherché.

3. — *Évaluer en watts la puissance moyenne nécessaire pour tourner, en 1/100 de minute, de 180 degrés autour d'un de ses diamètres un disque circulaire d'acier aimanté transversalement, dont l'intensité d'aimantation $\mathcal{J}$ est égale à 10 unités C. G. S., la surface S à 10 décimètres carrés, l'épaisseur ε à 1 millimètre, et qui est orienté dans un champ magnétique uniforme, d'intensité $\mathcal{H}$ égale à 50 unités C. G. S., de telle façon que les lignes de force le traversent sous une inclinaison de 45 degrés, en pénétrant par la face sud.*

L'énergie relative du feuillet de puissance $\mathfrak{T}$ et du champ, dont son contour embrasse le même flux $\mathfrak{N}$ avant et après la rotation de 180°, est, dans la position initiale du feuillet,

$$-\mathfrak{T}(+\mathfrak{N}) = -\mathfrak{T}\mathfrak{N}$$

et, dans sa position finale,

$$-\mathcal{F}(-\mathcal{N}) = \mathcal{F}\mathcal{N}.$$

Le mouvement détermine une variation de l'énergie potentielle du système égale à

$$(\mathcal{F}\mathcal{N}) - (-\mathcal{F}\mathcal{N}) = 2\,\mathcal{F}\mathcal{N},$$

qui est la mesure du travail nécessaire pour l'effectuer.

Si l'on fait

$$\mathcal{F} = \varepsilon\mathcal{I} = 0{,}1 \,.\, 10 = 1 \text{ unité C. G. S.}$$

et

$$\mathcal{N} = S\,\mathcal{H}\cos 45^{\circ} = 1\,000 \,.\, 50 \,.\, \frac{1}{\sqrt{2}} = 35\,300 \text{ maxwells.}$$

on trouve

$$2\,\mathcal{F}\mathcal{N} = 2 \,.\, 1 \,.\, 35\,300 = 70\,600 \text{ ergs}$$

Il y correspond une puissance moyenne

$$P = \frac{70\,600}{0{,}6} = 117\,500 \text{ ergs par seconde}$$

$$\text{ou } 117\,500 \,.\, 10^{-7} = 0{,}011\,75 \text{ watt.}$$

4. — *L'axe magnétique d'un aimant sphérique uniforme, dont l'intensité d'aimantation $\mathcal{I}$ est égale à 50 unités C. G. S. et le volume V à 1 décimètre cube, est disposé suivant la direction d'un champ magnétique uniforme comportant 20 000 lignes de force par mètre carré de plan équipotentiel. Évaluer en kilogrammètres le travail correspondant au pivotement de l'aimant de 180 degrés autour d'un diamètre normal à son axe magnétique, dans l'hypothèse où le champ ne modifie pas le magnétisme de l'aimant.*

Considérons l'aimant de rayon R, fig. 2, comme formé par la juxtaposition de feuillets. Le retournement d'un de ces feuillets, dont la puissance

$$\mathcal{F} = \mathcal{I} \,.\, R\,d\alpha \sin\alpha,$$

exige un travail égal à l'augmentation de l'énergie potentielle du feuillet passant de sa position initiale à sa position finale dans le champ.

Si les lignes de force du champ pénètrent primitivement dans le feuillet par la face sud de celui-ci et en nombre $\mathfrak{N}$, ce travail est donc

$$-\mathfrak{T}(-\mathfrak{N})-(-\mathfrak{T}\mathfrak{N}) = 2\mathfrak{T}\mathfrak{N} = 2\,.\,\mathfrak{J}\,\mathrm{R}\sin\alpha\,d\alpha\,.\,\pi(\mathrm{R}\sin\alpha)^2\,\mathcal{H},$$

$\mathcal{H}$ étant l'intensité du champ magnétique dans lequel l'aimant se trouve.

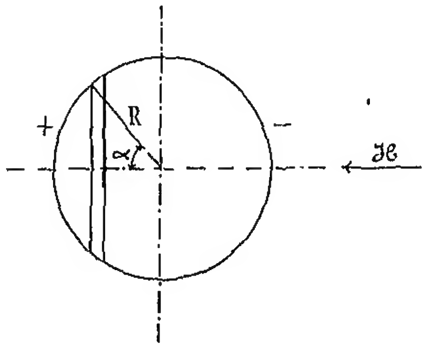

Fig. 2.

Le travail total cherché, correspondant au retournement de tous les feuillets constitutifs de l'aimant, est exprimé par

$$2\pi\mathfrak{J}\,\mathrm{R}^3\mathcal{H}\int_0^\pi \sin^3\alpha\,d\alpha = 2\pi\mathfrak{J}\,\mathrm{R}^3\mathcal{H}\int_0^\pi (1-\cos^2\alpha)\sin\alpha\,d\alpha$$

$$= 2\pi\mathfrak{J}\,\mathrm{R}^3\mathcal{H}\left|-\cos\alpha+\frac{\cos^3\alpha}{3}\right|_0^\pi$$

$$= 2\pi\mathfrak{J}\,\mathrm{R}^3\mathcal{H}\,.\,\frac{4}{3} = 2\mathrm{V}\mathfrak{J}\mathcal{H}.$$

On peut trouver le résultat plus rapidement en remarquant que le travail cherché est égal au double du produit de la masse m d'un des pôles de l'aimant par la différence $\mathcal{H}l$ des potentiels magnétiques du champ aux points occupés par les extrémités de l'axe magnétique de l'aimant, de longueur vraie l.

$\mathfrak{A}$ désignant le moment magnétique de l'aimant, on a donc

$$2\,m\,\mathcal{H}\,l = 2\,\mathfrak{A}\,\mathcal{H} = 2\,\mathrm{V}\,\mathfrak{J}\,\mathcal{H}.$$

Si

$$V = 1000 \text{ cm}^3,$$

$$\mathcal{J} = 50 \text{ unités C. G. S.},$$

$$\mathcal{H} = \frac{20\,000}{10\,000} = 2 \text{ lignes par cm}^2 \text{ ou gauss},$$

on trouve

$$2 \cdot 1\,000 \cdot 50 \cdot 2 = 200\,000 \text{ ergs}$$

ou

$$\frac{200\,000}{981 \cdot 10^4 \cdot 10^2} = 0{,}00204 \text{ kilogrammètre}.$$

5. — *Si l'on sectionnait, suivant un plan méridien, un aimant permanent en forme de tore de diamètre suffisant pour qu'on puisse admettre que son intensité d'aimantation est constante, les deux moitiés adhèreraient entr'elles avec une force de 25 kilogrammes. Les surfaces de contact étant des cercles de 20 millimètres de diamètre, évaluer le flux magnétique à travers le tore.*

La force portante F est exprimée en fonction de l'intensité d'aimantation $\mathcal{J}$ et de la surface de contact 2S par la formule

$$F = 2\pi\mathcal{J}^2 \cdot 2S.$$

D'autre part, si $\mathcal{B}$ est l'induction magnétique, on a

$$\mathcal{B} = 4\pi\mathcal{J}.$$

Par suite,

$$F = \frac{\mathcal{B}^2}{8\pi} \cdot 2S.$$

On tire de là

$$\mathcal{B} = \sqrt{\frac{4\pi F}{S}}$$

et, pour la valeur du flux,

$$\mathcal{N} = \mathcal{B}S = \sqrt{4\pi FS}$$

$$= \sqrt{4\pi \cdot (25 \cdot 10^3 \cdot 981) \cdot \pi\frac{2^2}{4}} = 31\,100 \text{ maxwells}.$$

6. — *Soit un tore d'acier aimanté circulairement, dont le diamètre intérieur d mesure 2 décimètres, la largeur radiale a 30 millimètres, et qui est composé de deux moitiés juxtaposées suivant un plan méridien, fig. 3. Sachant qu'il faut un couple d'arrachement C = 0,05 kilogramme-mètre pour séparer les deux moitiés en les faisant pivoter autour de leurs arêtes polaires radiales, évaluer le flux magnétique à travers le tore, dans l'hypothèse où l'intensité d'aimantation varie dans ce dernier en raison inverse de la distance à l'axe de révolution.*

K/x étant l'intensité d'aimantation à la distance x de l'axe de révolution du tore et b la hauteur de celui-ci suivant cet axe,

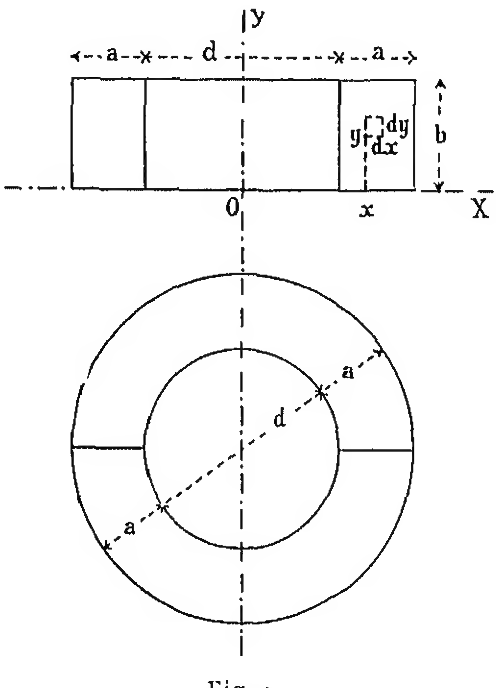

Fig. 3.

le flux cherché et le moment du couple résistant à l'arrachement sont exprimés par les intégrales

$$\mathcal{N} = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}+a} 4\pi \frac{K}{x} b\, dx = 4\pi K b \log_e \frac{\frac{d}{2}+a}{\frac{d}{2}}$$

et

$$C = 2\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}+a} \int_0^b 2\pi \frac{K^2}{x^2} dx\, dy \,.\, y = 2\pi K^2 b^2 \frac{a}{\frac{d}{2}\left(\frac{d}{2}+a\right)}.$$

En éliminant Kb entre ces deux équations, il vient

$$\mathcal{N} = 4\pi \sqrt{\frac{C\,\frac{d}{2}\left(\frac{d}{2}+a\right)}{2\pi a}} \,.\, \log_e \frac{\frac{d}{2}+a}{\frac{d}{2}}.$$

Avec

$$C = 0{,}05 \,.\, 10^3 \,.\, 981 \,.\, 10^2 = 4\,900\,000 \text{ dynes-cm},$$

$$d = 20 \text{ cm} \quad \text{et} \quad a = 3 \text{ cm},$$

on trouve

$$\mathcal{N} = 4 \,.\, 3{,}14 \,.\, 5810 \,.\, 0{,}262 = 19\,100 \text{ maxwells}.$$

7. — *Quel est le nombre de lignes de force magnétique émises par le pôle nord d'une tige cylindrique de fer doux, de très grande longueur, introduite dans un champ magnétique uniforme, parallèlement à la direction de celui-ci, si le diamètre de la tige mesure 2 millimètres et si à la valeur, 5 unités C. G. S., de l'intensité de ce champ correspond une perméabilité du métal égale à 2000 ?*

Étant donnée la continuité du flux magnétique, constitué par des lignes de force à l'extérieur des corps aimantés et par des lignes d'induction à l'intérieur de ceux-ci, le flux de force total s'échappant du pôle nord de la tige aimantée par influence est numériquement égal à l'expression

$$\int_0^S \mathcal{B} \cos\alpha\, ds,$$

où ds est un élément de la section droite qui, par raison de symétrie, délimite théoriquement, au milieu de la longueur de la tige, la surface polaire positive de celle-ci de la surface polaire négative, S l'aire de cette section, $\mathcal{B}$ la valeur de l'induction magnétique au point où se trouve l'élément considéré et α l'angle de la direction de l'induction avec l'axe de la tige en ce point.

A cause de la grande longueur de la tige, on peut admettre que la réaction des pôles est négligeable dans la région médiane, où la force magnétisante se réduit par suite à l'intensité $\mathcal{H}$ du champ uniforme primitif. Dans ces conditions, en tous les points de la section droite qui divise la tige en deux moitiés, l'induction présente la même valeur et est normale à cette section ($\alpha = 0$).

μ étant la perméabilité du métal correspondant à $\mathcal{H}$, on a donc

$$\int_0^S \mathcal{B} \cos \alpha \, ds = \mathcal{B} S = \mu \mathcal{H} S.$$

Si

$$S = \pi \frac{\overline{0,2}^2}{4} = 0,0314 \text{ cm}^2, \quad \mathcal{H} = 5 \text{ gauss} \quad \text{et} \quad \mu = 2000,$$

on trouve

$$\mu \mathcal{H} S = 2000 \cdot 5 \cdot 0,0314 = 314 \text{ maxwells.}$$

8. — *Évaluer la force démagnétisante d'un aimant sphérique uniforme dont l'intensité d'aimantation vaut 5 unités C. G. S.*

L'aimant peut être envisagé comme constitué par des filets magnétiques rectilignes parallèles, d'intensité d'aimantation constante, égale à la valeur $\mathcal{I}$ donnée.

Soit α, fig. 4, l'angle que l'un de ces filets, de section droite élémentaire ds, fait avec les rayons passant par ses extrémités. Comme celles-ci apportent des charges magnétiques $\mathcal{I}\,ds$ aux éléments de surface correspondants $ds/\cos\alpha$ des pôles hémisphériques de l'aimant, la densité superficielle de ces derniers aux endroits considérés est

$$\sigma = \frac{\mathfrak{J}\, ds}{\left(\dfrac{ds}{\cos \alpha}\right)} = \mathfrak{J} \cos \alpha.$$

La densité superficielle est donc égale à l'intensité d'aimantation aux extrémités du diamètre coïncidant avec l'axe magnétique de l'aimant et décroît à partir de ces points jusqu'à la circonférence limitant le plan diamétral normal à l'axe, suivant laquelle elle est nulle.

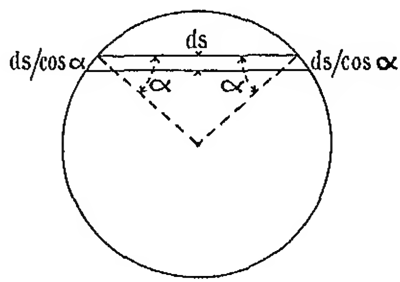

Fig. 4.

C'est l'action des deux couches magnétiques hémisphériques, de densité superficielle variant suivant la loi du cosinus et de polarités contraires, sur une unité de masse positive en un point intérieur de l'aimant, qui mesure la force démagnétisante de celui-ci en ce point.

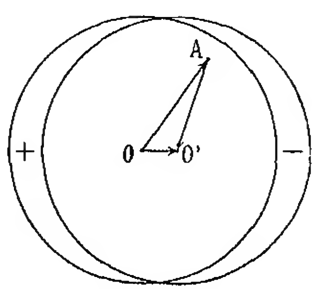

Fig. 5.

Or, si l'on remarque que la portion de rayon comprise entre les surfaces de deux sphères identiques, dont les centres

sont à une distance infiniment petite OO′, est égale à OO′ cos α, α désignant l'angle du rayon avec la direction de la droite des centres, on voit que, pour la recherche en vue, l'on peut remplacer l'aimant par deux surfaces sphériques de rayon égal à celui de l'aimant, dont les centres O et O′ sont infiniment rapprochés, et dont les intervalles de part et d'autre du plan médian perpendiculaire à la ligne des centres sont chargés l'un d'agent magnétique positif et l'autre d'agent magnétique négatif à une densité cubique δ telle que

$$\delta \, . \, OO' = \mathfrak{J}.$$

Comme, d'autre part, la force cherchée n'est pas modifiée par l'adjonction aux masses ainsi définies de deux quantités d'agent égales entr'elles, de signes contraires et occupant la même position, dont les actions se neutralisent, le problème se ramène finalement à la détermination de l'intensité du champ magnétique à l'intérieur de deux sphères dont la distance OO′ des centres est infiniment petite et qui sont complètement remplies respectivement d'agent magnétique positif et d'agent magnétique négatif à la densité cubique uniforme $\delta = \mathfrak{J} : OO'$.

Or, en un point A quelconque d'un tel système, fig. 5, l'intensité du champ dû à la sphère positive de centre O, considérée isolément, est

$$\frac{\frac{4}{3}\pi \, . \, \overline{OA}^3 \, . \, \delta}{\overline{OA}^2} = \frac{4}{3}\pi \, . \, OA \, . \, \delta$$

et peut être représentée graphiquement par le vecteur OA. Celle du champ créé en ce point par la sphère négative de centre O′ seule est

$$\frac{\frac{4}{3}\pi \, . \, \overline{O'A}^3 \, . \, \delta}{\overline{O'A}^2} = \frac{4}{3}\pi \, . \, O'A \, . \, \delta$$

et peut être figurée, à la même échelle, par le vecteur AO′. Le vecteur représentatif du champ résultant est alors OO′. L'intensité de ce dernier est, par suite, égale à

$$\frac{4}{3}\pi . OO' . \delta = \frac{4}{3}\pi \mathcal{J}$$

et sa direction est parallèle à la droite des centres.

On conclut de là qu'en tous les points d'un aimant sphérique uniforme la force démagnétisante est la même en grandeur et en direction. Elle vaut $4\pi/3$ fois l'intensité d'aimantation et est dirigée du pôle nord vers le pôle sud, parallèlement à l'axe magnétique.

Si $\mathcal{J} = 5$ unités C. G. S., on trouve

$$\frac{4}{3}\pi \mathcal{J} = \frac{4}{3} . 3{,}14 . 5 = 20{,}9 \text{ gauss.}$$

9. — *Quelle est, en centigrammes par unité C. G. S. de pole, la force démagnétisante $\mathcal{H}$ d'un aimant sphérique uniforme de $2R = 1$ décimètre de diamètre, qui développe un potentiel magnétique $\mathcal{V}$ de 20 unités C. G. S. en un point du prolongement de son axe magnétique distant de $a = 0{,}25$ mètre du centre ?*

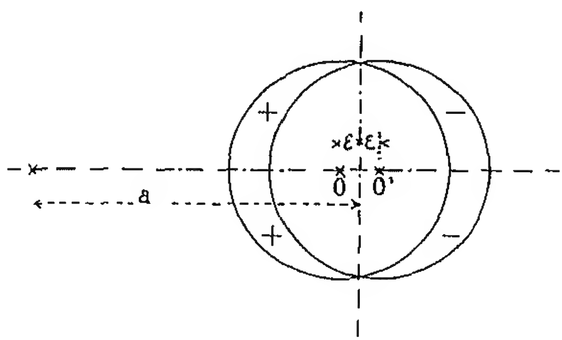

Fig 6

Soit δ la densité cubique d'agent et 2ε, fig. 6, l'écartement infiniment petit des centres des deux sphères de polarités contraires équivalentes à l'aimant.

On a

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3 \delta \left(\frac{1}{a-\varepsilon} - \frac{1}{a+\varepsilon}\right).$$

Mais, si $\mathcal{J}$ désigne l'intensité d'aimantation de l'aimant,

$$\mathcal{H} = \frac{4}{3}\pi\mathcal{J} = \frac{4}{3}\pi \cdot 2\varepsilon\delta.$$

Par suite,

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{3\mathcal{H}}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a-\varepsilon} - \frac{1}{a+\varepsilon}\right) = \frac{R^3\mathcal{H}}{a^2-\varepsilon^2};$$

d'où l'on tire, en négligeant devant a^2 l'infiniment petit du second ordre ε^2,

$$\mathcal{H} = \frac{a^2\mathcal{V}}{R^3}.$$

En posant $a = 25$ cm, $\mathcal{V} = 20$ unités C. G. S., $R = 5$ cm, on trouve

$$\mathcal{H} = \frac{\overline{25}^2 \cdot 20}{5^3} = 100 \text{ gauss},$$

c'est-à-dire 100 dynes ou $100 \cdot 10^2/981 = 10{,}2$ centigrammes par unité C. G. S. de pôle.

Au lieu de considérer les sphères pleines équivalentes à l'aimant, on pourrait partir de l'expression du potentiel élémentaire

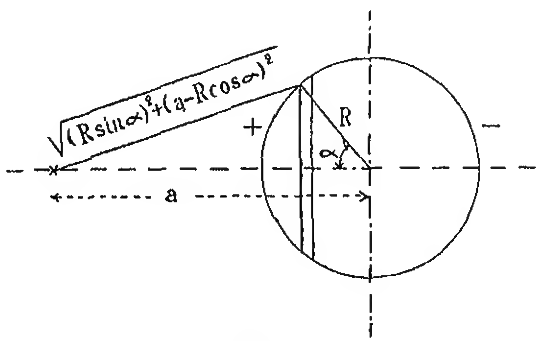

Fig. 7

dû à un anneau polaire normal à l'axe magnétique, fig. 7 :

$$d\mathcal{V} = \frac{2\pi R \sin\alpha \cdot R\,d\alpha \cdot \mathcal{J}\cos\alpha}{\sqrt{(R\sin\alpha)^2 + (a - R\cos\alpha)^2}} = \frac{2\pi R^2\mathcal{J}\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\alpha}}.$$

On en tire

$$\mathcal{V} = 2\pi R^2 \mathcal{J} \int_0^{\pi} \frac{\sin\alpha \cos\alpha \, d\alpha}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\alpha}}.$$

Pour effectuer l'intégration, posons

$$\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\alpha} = v,$$

d'où

$$\cos\alpha = \frac{R^2 + a^2 - v^2}{2aR},$$

$$\sin\alpha \, d\alpha = -d(\cos\alpha) = \frac{v\,dv}{aR}.$$

Par suite,

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\alpha \cos\alpha \, d\alpha}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\alpha}} = \int_{(0)}^{(\pi)} \frac{R^2 + a^2 - v^2}{2a^2R^2}\, dv$$

$$= \frac{1}{2a^2R^2}\left[(R^2 + a^2)v - \frac{v^3}{3}\right]_{(0)}^{(\pi)}$$

$$= \frac{1}{2a^2R^2}\left[(R^2 + a^2)(R^2 + a^2 - 2aR\cos\alpha)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}(R^2 + a^2 - 2aR\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2a^2R^2}\left[(R^2 + a^2)\left\{(a + R) - (a - R)\right\} - \frac{1}{3}\left\{(a + R)^3 - (a - R)^3\right\}\right]$$

$$= \frac{2R}{3a^2}.$$

Il vient donc

$$\mathcal{V} = 2\pi R^2 \mathcal{J} \cdot \frac{2R}{3a^2} = \frac{4\pi R^3}{3a^2} \cdot \frac{3\mathcal{M}}{4\pi} = \frac{R^3\mathcal{M}}{a^2}.$$

10. — *Soit un aimant sphérique uniforme dont le moment magnétique* $\mathcal{M}$ *est égal à 10000 unités C. G. S. et le rayon* R *à 5 centimètres. Quelle est la différence des potentiels magnétiques aux deux extrémités du diamètre parallèle à la direction de l'aimantation, abstraction faite du champ terrestre?*

L'intensité d'aimantation d'un aimant uniforme étant, par définition, le rapport de son moment magnétique à son volume, soit

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{M}}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

l'intensité d'aimantation de la sphère. Le champ magnétique à l'intérieur de celle-ci est constant en grandeur, direction et sens. Son intensité $\mathcal{H}$ est égale à $4\pi \mathcal{J}/3$, sa direction est parallèle à celle de l'aimantation et son sens est contraire à celui de cette dernière. Si donc $\mathcal{V}_1$ représente le potentiel magnétique au sommet du pôle nord de l'aimant, $\mathcal{V}_2$ le potentiel magnétique au sommet du pôle sud et $\mathcal{V}$ le potentiel magnétique en un point intérieur quelconque situé à une distance x du plan neutre, les valeurs de x étant comptées positivement dans la région du pôle sud,

$$\mathcal{H} = -\frac{d\mathcal{V}}{dx}$$

et

$$\int_{\mathcal{V}_1}^{\mathcal{V}_2} - d\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 = \mathcal{H}\int_{-R}^{+R} dx = 2\,\mathcal{H}\,R$$

$$= 2\,.\,\frac{4}{3}\pi\,\mathcal{J}\,.\,R = 2\,.\,\frac{4}{3}\pi\,.\,\frac{\mathcal{M}}{\frac{4}{3}\pi R^3}\,.\,R = 2\,\frac{\mathcal{M}}{R^2}\,.$$

Avec $\mathcal{M} = 10000$ unités C. G. S. et $R = 5$ cm, on trouve

$$\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 = 2\,\frac{10\,000}{5^2} = 800 \text{ unités C. G. S.}$$

11. — *Quelle est la distance des pôles d'un aimant sphérique uniforme dont le moment magnétique $\mathcal{M}$ est égal à 700 unités C. G. S. et à l'intérieur duquel l'induction magnétique $\mathcal{B}$ atteint 167,5 gauss?*

Soient $\mathcal{J}$ l'intensité d'aimantation de l'aimant et R le rayon de la sphère. On sait que

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{A}}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

D'autre part, l'induction magnétique étant mesurée par la force qui sollicite l'unité de pôle dans une fente infiniment mince normale à la direction de l'aimantation, on a, eu égard à l'action démagnétisante des pôles,

$$\mathcal{B} = 4\pi\mathcal{J} - \frac{4}{3}\pi\mathcal{J} = \frac{8}{3}\pi\mathcal{J}.$$

Par suite,

$$R = \sqrt[3]{\frac{3\mathcal{A}}{4\pi\mathcal{J}}} = \sqrt[3]{\frac{3\mathcal{A}}{4\pi}\cdot\frac{8\pi}{3\mathcal{B}}} = \sqrt[3]{\frac{2\mathcal{A}}{\mathcal{B}}}.$$

Mais, si $m = \mathcal{J}\,.\,\pi R^2$ désigne la masse totale d'un des pôles hémisphériques de l'aimant, la longueur vraie l de celui-ci est définie par la relation

$$l = \frac{\mathcal{A}}{m} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \mathcal{J}}{\mathcal{J}\,.\,\pi R^2} = \frac{4}{3} R = \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2\mathcal{A}}{\mathcal{B}}}.$$

Avec $\mathcal{A} = 700$ unités C. G. S. et $\mathcal{B} = 167,5$ gauss,

$$l = \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2\,.\,700}{167,5}} = 2,7 \text{ cm}.$$

12. — *Un aimant sphérique uniforme de 0,5 décimètre de rayon peut pivoter autour d'un diamètre vertical perpendiculaire à son axe magnétique. Un ressort à boudin, dont le coefficient de torsion représente 3 grammes-centimètres par radiant, permet de le diriger autour de son axe de rotation. Sachant qu'il faut tordre le ressort de 270 degrés pour orienter l'axe magnétique de l'aimant à angle droit avec le plan du méridien magnétique, en un endroit où la composante horizontale du champ terrestre vaut 0,2 gauss, quelle est l'induction magnétique de l'aimant?*

L'aimant est sollicité, en sens contraires, par le couple de torsion du ressort et par le couple dû au magnétisme terrestre, qui se font équilibre.

k et δ étant respectivement le coefficient de torsion du ressort et l'angle dont celui-ci est tordu, le moment du couple développé par le ressort est égal à $k\,\delta$.

L'expression du moment du couple antagoniste exercé par la terre est de la forme

$$2\,\mathcal{H}\int r\,dm,$$

$\mathcal{H}$ désignant la composante horizontale du champ terrestre, dm un élément de la masse polaire de l'aimant et r la distance de cet élément au plan neutre en coïncidence avec le méridien magnétique. L'intégrale doit être étendue à toute la surface hémisphérique d'un pôle.

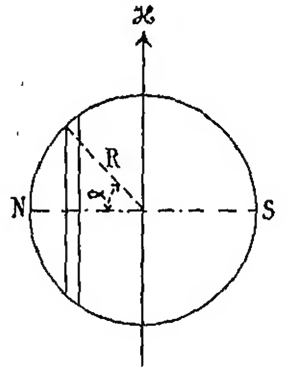

Fig. 8.

Si l'on remarque que, pour toutes les masses dm appartenant à une zone élémentaire parallèle au plan neutre et suivant laquelle la densité magnétique superficielle σ est constante, r a la même valeur, on voit, en se reportant à la fig. 8, que l'intégrale précédente peut s'écrire

$$2\,\mathcal{H}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{R}\cos\alpha\,.\,\sigma\,.\,2\pi\mathrm{R}\,.\,\mathrm{R}\,d\alpha\sin\alpha.$$

Comme $\sigma = \mathcal{J}\cos\alpha$, $\mathcal{J}$ étant l'intensité d'aimantation de la sphère, il vient, pour le moment du couple terrestre,

$$4\pi\,\mathcal{H}\,\mathcal{J}\,R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\alpha\sin\alpha\,d\alpha = 4\pi\,\mathcal{H}\,\mathcal{J}\,R^3\left[-\frac{\cos^3\alpha}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4}{3}\pi\,\mathcal{H}\,\mathcal{J}\,R^3.$$

De l'égalité

$$k\delta = \frac{4}{3}\pi\,\mathcal{H}\,\mathcal{J}\,R^3,$$

on tire

$$\mathcal{J} = \frac{3}{4}\frac{k\,\delta}{\pi\,\mathcal{H}\,R^3}.$$

En faisant, dans le second membre de la dernière équation,

$k = 3 \cdot 981 = 2943$ dynes-cm par radiant,

$\delta = \frac{3\pi}{2}$ radiants,

$\mathcal{H} = 0{,}2$ gauss,

$R = 5$ cm,

on trouve

$$\mathcal{J} = \frac{3 \cdot 2943 \cdot 3/2}{4 \cdot 0{,}2 \cdot 5^3} = 132{,}5 \text{ unités C. G. S.}$$

Or, l'induction magnétique $\mathcal{B}$ de l'aimant est donnée par la relation

$$\mathcal{B} = 4\pi\mathcal{J} - \frac{4}{3}\pi\mathcal{J} = \frac{8}{3}\pi\mathcal{J}.$$

Par suite,

$$\mathcal{B} = \frac{8}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 132{,}5 = 1110 \text{ gauss.}$$

13. — *Quelle est l'intensité du champ magnétique uniforme où l'introduction d'une sphère en fer doux porte le métal à une induction magnétique de 500 gauss, pour laquelle sa perméabilité vaut 300?*

Introduite dans un champ uniforme d'intensité $\mathcal{H}$, la sphère acquiert une intensité d'aimantation $\mathcal{J}$ sous l'influence combinée de ce champ et de la réaction directement opposée des

pôles hémisphériques induits, qui soumet tous ses points à la même force magnétisante résultante

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} - \frac{4}{3}\pi \mathcal{J}.$$

En tenant compte de toutes les forces sollicitant l'unité de pôle dans une fente infiniment mince, normale à la direction de l'aimantation, il vient, pour l'induction magnétique à travers le corps,

$$\mathcal{B} = \mathcal{H}' + 4\pi \mathcal{J} = \mathcal{H} + \frac{8}{3}\pi \mathcal{J}. \qquad (1)$$

D'autre part, la perméabilité est définie par la relation

$$\mu = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{H}'} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{H} - \frac{4}{3}\pi \mathcal{J}}. \qquad (2)$$

Par élimination de $\mathcal{J}$ entre les équations (1) et (2), on obtient

$$\mathcal{H} = \frac{\mu + 2}{3\mu}\mathcal{B}.$$

Pour que $\mathcal{B} = 500$ gauss, avec $\mu = 300$, il faut donc que

$$\mathcal{H} = \frac{300 + 2}{3.300} 500 = 167,8 \text{ gauss}.$$

14. — *Dans un champ magnétique uniforme d'intensité telle que l'unité C. G. S. de masse magnétique y subit une force de 0,01 gramme, on introduit une sphère de fer doux. Sachant que l'induction magnétique à travers la sphère acquiert une valeur $\mathcal{B} = 28,8$ gauss, calculer la perméabilité μ du métal correspondant à cette induction.*

Soient $\mathcal{H}$ l'intensité primitive du champ magnétique, égale à 0,01.981 ou 9,81 gauss, et $\mathcal{J}$ l'intensité d'aimantation acquise par la sphère introduite dans ce champ. On a

$$\mu = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{H} - \frac{4}{3}\pi \mathcal{J}}.$$

Mais, de l'expression de l'induction magnétique

$$\mathcal{B} = \mathcal{H} - \frac{4}{3}\pi \mathcal{J} + 4\pi \mathcal{J} = \mathcal{H} + \frac{8}{3}\pi \mathcal{J},$$

on tire

$$\frac{4}{3}\pi \mathcal{J} = \frac{\mathcal{B} - \mathcal{H}}{2}.$$

Par suite,

$$\mu = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{H} - \frac{\mathcal{B} - \mathcal{H}}{2}} = \frac{2\,\mathcal{B}}{3\,\mathcal{H} - \mathcal{B}} = \frac{2 \cdot 28{,}8}{3 \cdot 9{,}81 - 28{,}8} = 91{,}4.$$

15. — *Quelle est l'induction magnétique $\mathcal{B}$ à travers une sphère de bismuth, dont la perméabilité μ est égale à 0,9991, quand cette sphère est introduite dans un champ magnétique uniforme d'une intensité $\mathcal{H}$ de 200 gauss?*

Il s'agit d'une substance diamagnétique, de perméabilité inférieure à l'unité et de susceptibilité négative. Sous l'influence du champ, les molécules polarisées de la sphère se disposent suivant des filets magnétiques rectilignes, parallèles à la direction du champ, mais orientés en sens inverse, de sorte qu'il apparaît deux couches polaires hémisphériques, séparées par le plan diamétral normal au champ, et que les lignes de force de celui-ci pénètrent dans la sphère par le pôle nord et s'en échappent par le pôle sud, fig. 9.

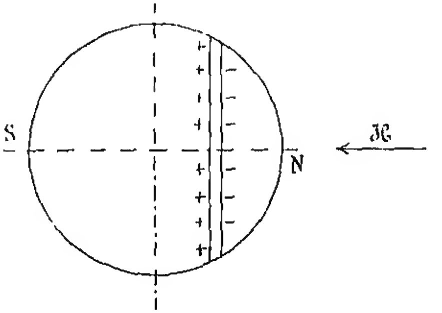

Fig. 9.

Les deux pôles développent à l'intérieur de la sphère une

action magnétisante dont la grandeur, la direction et le sens sont constants en tous les points. Si $\mathcal{J}$ est la valeur numérique de l'intensité d'aimantation de la sphère, cette force magnétisante est égale à $4\pi\mathcal{J}/3$, sa direction coïncide avec celle du champ primitif $\mathcal{H}$ et son sens est le même que celui de $\mathcal{H}$. L'intensité du champ uniforme résultant auquel la sphère est soumise devient ainsi

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{4}{3}\pi\mathcal{J}.$$

L'induction magnétique à travers la sphère, mesurée par la force s'exerçant sur l'unité de masse magnétique positive située à l'intérieur d'une fente transversale infiniment mince, pratiquée dans la sphère normalement à l'aimantation, est, par suite,

$$\mathcal{B} = \mathcal{H}' - 4\pi\mathcal{J} = \mathcal{H} - \frac{8}{3}\pi\mathcal{J}.$$

Mais, par définition de la perméabilité, on a

$$\mathcal{B} = \mu\mathcal{H}' = \mu\left(\mathcal{H} + \frac{4}{3}\pi\mathcal{J}\right).$$

En éliminant $\mathcal{J}$ entre les deux expressions de $\mathcal{B}$, il vient

$$\mathcal{B} = \frac{3\mu\mathcal{H}}{\mu + 2}.$$

Cette induction a le même sens que le champ dans lequel la sphère a été amenée.

Avec $\mu = 0{,}9991$ et $\mathcal{H} = 200$ gauss, on trouve

$$\mathcal{B} = \frac{3 \cdot 0{,}9991 \cdot 200}{0{,}9991 + 2} = 199{,}9 \text{ gauss}.$$

Chapitre II.

ÉLECTROSTATIQUE.

16. — *Quelle serait en tonnes la force répulsive s'exerçant entre deux charges électriques de même signe, égales à 1 coulomb, concentrées en des points situés à 1 mètre de distance dans l'air ?*

La force répulsive f de deux charges électriques punctiformes q et q' à la distance r est donnée par la loi de Coulomb:

$$f = \frac{K\, qq'}{r^2}.$$

Cette formule donne la valeur numérique de f en dynes, si l'on pose, pour l'air dont le pouvoir inducteur spécifique est égal à l'unité par définition, $K = (3 \cdot 10^{10})^2$, et si l'on exprime les quantités d'électricité en unités C. G. S. électromagnétiques et la distance en centimètres.

On trouve ainsi, avec $q = q' = 10^{-1}$ et $r = 100$,

$$f = \frac{3^2 \cdot 10^{20} \cdot 10^{-2}}{100^2} = 9 \cdot 10^{14} \text{ dynes,}$$

soit

$$9 \cdot 10^{14} \cdot \frac{1}{981} = 9{,}18 \cdot 10^{11} \text{ grammes}$$

ou

$$918\,000 \text{ tonnes.}$$

17. — *Un électroscope comporte, au milieu d'une enveloppe métallique mise à la terre, deux petits pendules identiques, formés chacun d'une boule en moelle de sureau suspendue à un fin fil conducteur. Dans un gaz radio-actif, la déviation des pendules diminue de moitié en 1 minute, lorsqu'une charge d'électricité portant leur potentiel à 4500 volts les a écartés d'un angle de 60 degrés de part et d'autre de la verticale passant par leur point de suspension commun. Quelle est approximativement, pendant l'intervalle de temps considéré, l'intensité moyenne du courant électrique de décharge à travers le milieu radio-actif, si l'on peut admettre, vu les dimensions relativement grandes de l'enveloppe, que la capacité de l'appareil est indépendante de l'angle d'inclinaison des pendules et égale, en unités C. G. S. électrostatiques, à 1 centimètre?*

Soient, à un moment quelconque pendant la chute des pendules, q la charge et v le potentiel de ceux-ci. Ces deux grandeurs sont liées par la formule

$$q = Cv,$$

où C représente la capacité de l'électroscope considéré comme un condensateur dont les armatures sont le système mobile et l'enveloppe maintenue à un potentiel nul.

L'intensité moyenne du courant de perte faisant passer la charge de la valeur initiale Q_0 à la valeur finale Q_1 en un temps T est

$$I = \frac{1}{T}(Q_0 - Q_1) = \frac{C}{T}(V_0 - V_1),$$

V_0 et V_1 désignant les potentiels au commencement et à la fin de l'expérience.

Pour déduire la valeur de V_1 des données du problème, cherchons la relation générale entre le potentiel v et la déviation angulaire α des pendules par rapport à la verticale.

Supposons la charge $q = Cv$ entièrement localisée sur les boules des pendules. L'enveloppe de l'électroscope étant sans

action électrique intérieure, la déviation des pendules résulte simplement de la répulsion mutuelle des boules électrisées.

Poussons l'hypothèse jusqu'à attribuer une densité superficielle uniforme à la masse électrique $q/2$ couvrant chacune de ces dernières. Dans ces conditions, on peut considérer les masses agissantes comme concentrées aux centres des boules.

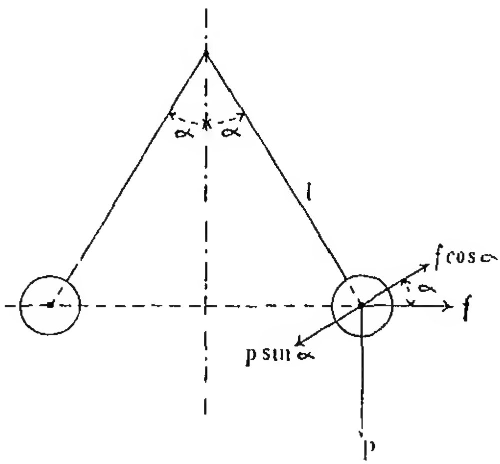

Fig. 10

Si ces centres sont à une distance l du point de suspension des pendules, leur écartement linéaire est $2l \sin \alpha$, fig. 10, et, d'après la loi de Coulomb, la force répulsive sollicitant les boules suivant la droite des centres est

$$f = K \frac{(q/2)^2}{(2\,l \sin \alpha)^2} = K \frac{C^2 v^2}{16\, l^2 \sin^2 \alpha}.$$

Chacun des pendules est donc soumis à un couple déviant $fl \cos \alpha$ équilibré par un couple antagoniste dû à la pesanteur et égal à $pl \sin \alpha$, si p est le poids d'une boule et si le poids du fil de suspension de celle-ci peut être négligé.

De l'équation d'équilibre

$$K \frac{C^2 v^2}{16\, l^2 \sin^2 \alpha} \cdot l \cos \alpha = pl \sin \alpha,$$

on tire

$$v = \frac{4l}{C} \sqrt{\frac{p}{K}} \sin \alpha \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Les potentiels du système mobile de l'électroscope sont proportionnels à la fonction $\sin \alpha \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$ de l'angle de déviation α. Par suite, si α_0 et α_1 sont les écarts angulaires correspondant aux potentiels V_0 et V_1, on a

$$V_1 = \frac{\sin \alpha_1 \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_1}}{\sin \alpha_0 \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_0}} V_0$$

et l'expression du courant moyen cherché devient

$$I = \frac{CV_0}{T}\left(1 - \frac{\sin \alpha_1 \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_1}}{\sin \alpha_0 \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_0}}\right).$$

Avec

$$C = 1 \cdot \frac{10^9}{(3 \times 10^{10})^2} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{ farad},$$

$$V_0 = 4\,500 \text{ volts},$$

$$T = 60 \text{ secondes},$$

$$\alpha_0 = 60^\circ \text{ et } \alpha_1 = \alpha_0/2 = 30^\circ,$$

on trouve

$$I = \frac{4\,500}{9 \cdot 10^{11} \cdot 60}\left(1 - \frac{0,5\sqrt{0,578}}{0,866\sqrt{1,733}}\right) = 0,0000555 \cdot 10^{-6} \text{ ampère}.$$

18. — *De combien d'unités C. G. S. électrostatiques une charge d'électricité, égale à celle transportée dans l'électrolyse par un gramme d'ion hydrogène, élèverait-elle le potentiel de la terre considérée comme une sphère conductrice isolée ?*

Entre l'accroissement de charge électrostatique Q et l'élévation de potentiel V de la sphère, dont C désigne la capacité, existe la relation

$$Q = CV,$$

d'où l'on tire

$$V = \frac{Q}{C}.$$

On sait qu'un gramme d'ion hydrogène apporte à la cathode d'un électrolyseur 96540 coulombs ou $96540 \cdot 10^{-1} \cdot 3 \times 10^{10}$ unités C. G. S. électrostatiques de quantité d'électricité.

D'autre part, dans le système C. G. S. électrostatique d'unités, le coefficient K de la loi de Coulomb est égal à l'unité et la capacité d'un conducteur sphérique isolé est mesurée par son rayon exprimé en centimètres, de sorte que, pour la terre, on a sensiblement

$$C = 6{,}37 \cdot 10^{8}.$$

Par suite,

$$V = \frac{96540 \cdot 3 \cdot 10^{9}}{6{,}37 \cdot 10^{8}} = 454000 \text{ unités C. G. S. électrostatiques,}$$

soit

$$454000 \cdot 3 \times 10^{10} \cdot 10^{-8} = 136 \cdot 10^{6} \text{ volts.}$$

19. — *Les armatures d'un condensateur sont des sphères concentriques de rayons $r_1 = 50$ centimètres et $r_2 = 55$ centimètres, chargées à une différence de potentiel de 10 unités C. G. S. électrostatiques. Évaluer, en grammes par microcoulomb, l'intensité du champ électrique au milieu de la distance qui sépare les armatures.*

Une sphère électrisée étant sans action en tous les points intérieurs et agissant, en un point extérieur, comme si sa charge était concentrée au centre, on a, pour expression de l'intensité de champ cherchée, en désignant par Q la charge du condensateur,

$$H = K \frac{Q}{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2}.$$

Mais, si C est la capacité du condensateur et V la différence de potentiel de ses armatures,

$$Q = CV = \frac{r_1 r_2}{K(r_2 - r_1)} V,$$

de sorte que

$$H = K \frac{4}{(r_1 + r_2)^2} \cdot \frac{r_1 r_2}{K(r_2 - r_1)} V = \frac{4 r_1 r_2 V}{(r_1 + r_2)^2 (r_2 - r_1)}.$$

En posant $r_1 = 50$ cm. et $r_2 = 55$ cm.

$V = 10 . 3 \times 10^{10} = 3 . 10^{11}$ unités C. G. S. électromagnétiques,

il vient

$$H = \frac{4 . 50 . 55 . 3 . 10^{11}}{105^2 . 5} = 6 . 10^{10} \text{ dynes}$$

par unité C. G. S. électromagnétique de quantité d'électricité,

soit

$$\frac{6 . 10^{10}}{981 . 10 . 10^6} = 6,12 \text{ grammes par microcoulomb.}$$

20. — *Deux plaques métalliques minces, de 3 décimètres de côté, sont disposées, suivant un même plan, avec une distance de 100 millimètres entre leurs bords parallèles voisins, dans un diélectrique dont le pouvoir inducteur spécifique est 2. Si ces plaques, chargées de quantités d'électricité de signes contraires égales à 60 unités C. G. S. électrostatiques, créent un champ électrique dont les lignes de force sont des courbes circulaires, quelle est, en volts, la différence de leurs potentiels ?*

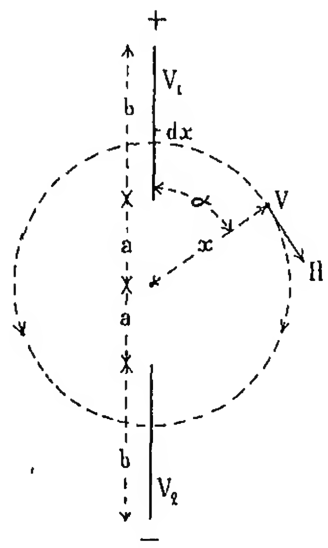

Fig. 11

Soient, fig. 11, b la longueur des côtés des plaques métal-

liques carrées et a la distance des bords rapprochés des plaques à la droite de symétrie parallèle à ces bords.

Par raison de symétrie, la densité électrique sur les faces des plaques est la même à égale distance de la droite ci-dessus et les lignes de force du champ électrostatique courent de chacune des faces de la plaque positive vers la face correspondante de la plaque négative suivant des demi-circonférences normales aux plaques et ayant leurs centres sur la droite de symétrie.

Si $\pm\sigma$ désigne la densité superficielle d'agent à la distance x de la droite de symétrie, la charge totale de la plaque positive est

$$Q = 2\int_a^{a+b} \sigma\, b\, dx.$$

Pour trouver la loi de variation de σ en fonction de x, remarquons qu'en un point d'une ligne de force de rayon x, situé à une distance angulaire φ de la plaque positive et où le potentiel est V, l'intensité du champ a pour expression

$$H = -\frac{dV}{x\, d\varphi},$$

de sorte qu'en représentant par $V_1 - V_2$ la différence de potentiel des plaques,

$$-\int_{V_1}^{V_2} dV = Hx\int_0^{\pi} d\varphi,$$

attendu que H est constant le long d'une même ligne de force.

Par suite,

$$V_1 - V_2 = \pi H x.$$

Mais

$$H = 4\pi K\sigma,$$

car, pour appliquer le théorème de Gauss à un cylindre infiniment petit normal à la plaque positive et limité de part et d'autre de celle-ci à une surface équipotentielle voisine d'un élément ds de la plaque, il faut écrire

$$4\pi K \cdot 2\sigma\, ds = 2 \cdot H\, ds,$$

puisque les deux faces de la plaque émettent des lignes de force.

On a donc

$$V_1 - V_2 = 4\pi^2 K \sigma x$$

ou

$$\sigma = \frac{V_1 - V_2}{4\pi^2 K x}.$$

Il résulte de là que

$$Q = \frac{2(V_1 - V_2)b}{4\pi^2 K}\int_a^{a+b}\frac{dx}{x} = \frac{(V_1 - V_2)b}{2\pi^2 K}\log_e\frac{a+b}{a};$$

d'où l'on tire

$$V_1 - V_2 = \frac{2\pi^2 K Q}{b\log_e\frac{a+b}{a}}.$$

En posant

$$K = \frac{1}{2}(3 \times 10^{10})^2,$$

$$Q = \frac{66}{3 \times 10^{10}} = 22 \cdot 10^{-10} \text{ unité C. G. S. électromagnétique,}$$

$$a = 5 \text{ cm}, \qquad b = 30 \text{ cm},$$

on trouve, pour la valeur de la différence de potentiel demandée,

$$V_1 - V_2 = \frac{2 \cdot 3{,}14^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot 10^{20} \cdot 22 \cdot 10^{-10}}{30(\log_e 35 - \log_e 5)}$$

$$= 33{,}3 \cdot 10^{10} \text{ unités C. G. S. electromagnétiques,}$$

soit

$$33{,}3 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-8} = 3\,330 \text{ volts.}$$

21. — *Les armatures d'une bouteille de Leyde, dont le verre présente une épaisseur de 1 millimètre, sont chargées à une différence de potentiel de 1000 volts. Quelle est, en centigrammes par centimètre carré, la compression à laquelle est soumis le diélectrique?*

L'expression de la pression electrostatique est

$$p = 2 \pi K \sigma^2.$$

Mais, si Q, C, V et s désignent respectivement la charge et la capacité électrostatique de la bouteille, la différence de potentiel de ses armatures et la surface d'une de celles-ci dont la distance est d, la densité superficielle σ satisfait aux relations

$$\sigma = \frac{Q}{s} = \frac{C V}{s} = \frac{s}{4 \pi K d} \cdot \frac{V}{s} = \frac{V}{4 \pi K d}.$$

Il s'ensuit que

$$p = 2 \pi K \frac{V^2}{16 \pi^2 K^2 d^2} = \frac{V^2}{8 \pi K d^2}.$$

Si l'on fait, dans cette formule,

$V = 1\,000 \cdot 10^8$ unités C. G. S. électromagnétiques,

$K = \frac{1}{6} (3 \times 10^{10})^2 = 1{,}5 \cdot 10^{20}$, en évaluant à 6 le pouvoir inducteur spécifique du verre,

$d = 0{,}1$ cm,

il vient

$$p = \frac{1\,000^2 \cdot 10^{16}}{8 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{20} \cdot 0{,}1^2} = 265 \text{ dynes par cm}^2,$$

soit

$$265 \cdot \frac{1}{981} \cdot 10^2 = 27 \text{ centigrammes par cm}^2$$

C'est la valeur cherchée.

22. — *Une sphère conductrice uniformément électrisée, résultant de la juxtaposition de deux calottes limitées à un petit cercle que l'on voit du centre sous un angle solide $\omega = 0{,}268\,\pi$, fig. 12, possède une énergie potentielle W équivalente à 50 microcalories (gr-d). Quel est son rayon R, si les deux calottes se repoussent avec une force p de 30 milligrammes ?*

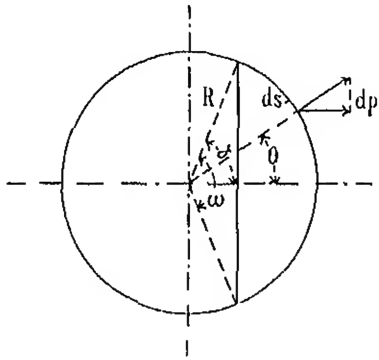

Fig. 12.

Soient σ la densité électrique superficielle de la sphère, Q la quantité totale d'agent dont celle-ci est chargée et V son potentiel :

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 \sigma \cdot K \frac{4\pi R^2 \sigma}{R} = 8\pi^2 K R^3 \sigma^2.$$

La résultante p des pressions électrostatiques déterminant la répulsion mutuelle des calottes sphériques est évidemment dirigée suivant le diamètre de symétrie normal au plan de séparation de ces dernières.

Si θ est l'angle que fait avec ce diamètre la direction radiale de la pression électrostatique $2\pi K \sigma^2 ds$ qui s'exerce sur la masse σds couvrant un élément de surface quelconque ds d'une des calottes, on a donc

$$dp = 2\pi K \sigma^2 ds \cos\theta.$$

Mais $ds \cos\theta$ est la projection de l'élément ds sur le plan de séparation des calottes, dont la surface circulaire est $\pi R^2 \sin^2 \alpha$, α étant l'angle plan défini par la relation

$$\omega = 2\pi(1 - \cos\alpha).$$

Par suite,

$$p = 2\pi K \sigma^2 \int ds \cos\theta = 2\pi^2 K R^2 \sigma^2 \sin^2 \alpha.$$

Dès lors

$$W = 8\pi^2 K R^3 \frac{p}{2\pi^2 K R^2 \sin^2\alpha} = 4 R \frac{p}{\sin^2\alpha}$$

et

$$R = \frac{W}{4p} \sin^2\alpha.$$

Avec

$$W = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}425 \cdot 10^5 \cdot 981 = 2085 \text{ ergs},$$

$$p = 30 \cdot 10^{-3} \cdot 981 = 29{,}45 \text{ dynes}$$

et

$$\omega = 0{,}268\,\pi,$$

il vient

$$\cos\alpha = 1 - \frac{0{,}268\,\pi}{2\pi} = 0{,}866,$$

$$\sin^2\alpha = 1 - 0{,}866^2 = 0{,}25$$

et, par suite,

$$R = \frac{2085 \cdot 0{,}25}{4 \cdot 29{,}45} = 4{,}43 \text{ cm}$$

23. — *Les deux armatures d'un condensateur plan, fig. 13, sont des carrés de a = 50 centimètres de côté, disposés suivant un dièdre dont l'ouverture angulaire α mesure 22,5 degrés et dont l'arête est à une distance d de 10 centimètres des côtés les plus rapprochés qui lui sont parallèles. Lorsque les armatures sont portées à une différence de potentiel $(V_1 - V_2)$ de 5000 volts, quel est, par rapport à l'arête du dièdre, le moment du couple qui tend à les rapprocher, dans l'hypothèse que le condensateur est noyé dans le pétrole, dont le pouvoir inducteur spécifique est 2, et que les surfaces équipotentielles du champ électrostatique compris entre les armatures sont des plans passant par l'arête du dièdre ?*

De la nature des surfaces équipotentielles et de la forme des lignes de force, qui sont des arcs de circonférences ayant leurs centres sur l'arête du dièdre et situées dans des plans normaux à celle-ci, résulte que l'intensité du champ électrostatique, supposé confiné entre les armatures, est constante à une

distance déterminée x de l'arête et que la densité superficielle σ de la charge des armatures ne varie qu'avec x.

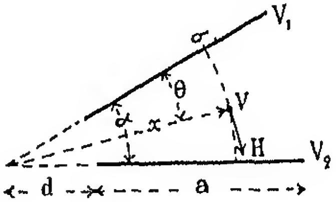

Fig. 13.

La surface d'armature $a\,dx$ est sollicitée par une force élémentaire

$$2\pi K \sigma^2 a\, dx,$$

dont le moment par rapport à l'arête du dièdre est

$$dC = 2\pi K \sigma^2 a x\, dx.$$

Si H et V désignent respectivement l'intensité et le potentiel du champ en un point du dièdre défini par la longueur x de la normale qui le joint à l'arête et par l'angle θ que cette normale fait avec l'armature au potentiel le plus élevé V_1, on a

$$H = -\frac{dV}{x\, d\theta}$$

et

$$-\int_{V_1}^{V_2} dV = V_1 - V_2 = Hx \int_0^{\alpha} d\theta = Hx\alpha.$$

Mais, comme le montre l'application du théorème de Gauss à une surface fermée contenant un élément d'armature et formée, du côté du champ, par un tube de force de section élémentaire et l'aire qu'il découpe dans le plan équipotentiel infiniment voisin de la plaque,

$$H = 4\pi K\sigma,$$

de sorte que

$$\sigma = \frac{V_1 - V_2}{4\pi K x \alpha}.$$

Par conséquent,

$$dc = 2\pi K \frac{(V_1 - V_2)^2}{16\pi^2 K^2 x^2 \alpha^2} a x\, dx = \frac{(V_1 - V_2)^2 a}{8\pi K \alpha^2} \frac{dx}{x}.$$

Le couple total cherché a donc pour moment

$$c = \frac{(V_1 - V_2)^2 a}{8\pi K \alpha^2} \int_d^{d+a} \frac{dx}{x} = \frac{(V_1 - V_2)^2 a}{8\pi K \alpha^2} \log_e \frac{d+a}{d}.$$

Avec

$V_1 - V_2 = 5000 \,.\, 10^8$ unités C. G. S. électromagnétiques,

$\alpha = \frac{22,5}{360} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{8}$ radiant,

$d = 10$ cm,

$a = 50$ cm,

on trouve, puisque pour le pétrole $K = \frac{(3 \times 10^{10})^2}{2}$,

$$c = \frac{5000^2 \,.\, 10^{16} \,.\, 50}{8 \,.\, 3,14 \cdot \frac{3^2 \,.\, 10^{20}}{2} \cdot \frac{\pi^2}{64}} \cdot \log_e \frac{10 + 50}{10}$$

$$= 12870 \text{ dynes-cm},$$

soit

$$\frac{12870}{981} = 13,2 \text{ grammes-cm}.$$

24. — *Soient deux cônes métalliques creux de même sommet, fig. 14, dont les axes, avec lesquels les génératrices font des angles plans α_1 de 44 et α_2 de 78 degrés, coïncident et dont l'intervalle est rempli de paraffine. Si l'on découpait dans l'ensemble un tronçon limité à deux sphères, de $r = 1,5$ et $R = 6,5$ décimètres de rayon, ayant leurs centres au sommet commun des cônes, quelle serait, en microcoulombs, la charge Q du condensateur ainsi réalisé, si les armatures en étaient portées à une différence de potentiel $(V_1 - V_2)$ de 3 unités C. G. S. électrostatiques ? On adoptera, pour le pouvoir inducteur spécifique de la paraffine, la valeur 2.*

Étant donnée la symétrie du condensateur autour de l'axe commun des cônes, la charge totale de l'armature intérieure

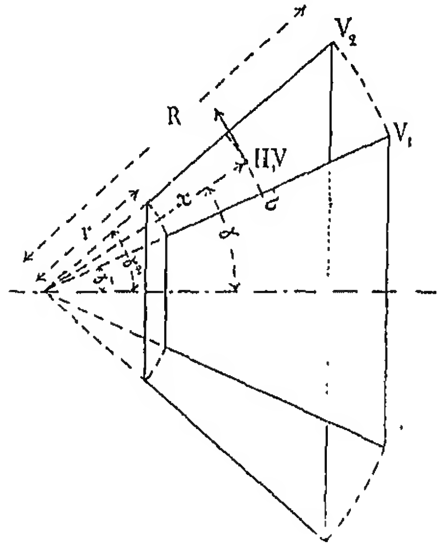

Fig. 14.

a pour expression

$$Q = \int_{r}^{R} \sigma \cdot 2\pi x \sin \alpha_1 \, dx,$$

σ désignant la densité électrique superficielle de cette armature, constante à une distance x déterminée du sommet des cônes.

Par raison de symétrie encore, la surface suivant laquelle le potentiel a une même valeur V dans le diélectrique du condensateur est conique et coaxiale aux armatures. A l'extrémité des vecteurs de longueur x faisant un même angle α avec l'axe des cônes, l'intensité H du champ est constante. Les lignes de force sont des arcs de circonférences ayant leurs centres au sommet des cônes et situées dans des plans passant par l'axe de ceux-ci.

On a donc

$$H = -\frac{dV}{r\,d\alpha}$$

et, en appliquant le théorème de la constance du flux dans un tube de force au tube délimité par deux sphères de rayons x et $x + dx$,

$$H \cdot 2\pi r \sin\alpha \cdot dr = 4\pi K\sigma \cdot 2\pi r \sin\alpha_1 \cdot dr$$

ou

$$H = \frac{4\pi K\sigma \sin\alpha_1}{\sin\alpha}.$$

Par suite,

$$-dV = 4\pi K\sigma \sin\alpha_1\, r \frac{d\alpha}{\sin\alpha}$$

et

$$\int_{V_1}^{V_2} - dV = V_1 - V_2 = 4\pi K\sigma \sin\alpha_1\, r \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= 4\pi K\sigma \sin\alpha_1\, r \log_e \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}};$$

de sorte que

$$\sigma = \frac{V_1 - V_2}{4\pi K \sin\alpha_1 \log_e \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}} \cdot \frac{1}{r}.$$

Il vient ainsi

$$Q = 2\pi \sin\alpha_1 \cdot \frac{V_1 - V_2}{4\pi K \sin\alpha_1 \log_e \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}} \int_r^R \frac{r\,dr}{r}$$

$$= \frac{V_1 - V_2}{2K \log_e \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}} (R - r).$$

Si

$$V_1 - V_2 = 3 \cdot 3 \times 10^{10} = 9 \cdot 10^{10} \text{ unités C. G. S. électromagnétiques}$$

et

$$R - r = 65 - 15 = 50 \text{ cm},$$

comme

$$\log_e \frac{\operatorname{tg} \frac{78}{2}}{\operatorname{tg} \frac{44}{2}} = \log_e \frac{0,810}{0,404} = 0,693$$

et comme, pour la paraffine,

$$K = \frac{(3 \times 10^{10})^2}{2} = 4,5 \cdot 10^{20},$$

on trouve

$$Q = \frac{9 \cdot 10^{10} \cdot 50}{2 \cdot 4,5 \cdot 10^{20} \cdot 0,693}$$

$$= 72,1 \cdot 10^{-10} \text{ unités C. G. S. électromagnétiques,}$$

soit

$$72,1 \cdot 10^{-10} \cdot 10 \cdot 10^{6} = 0,0721 \text{ microcoulomb.}$$

25. — *Évaluer en petites calories la quantité de chaleur dégagée par l'étincelle de décharge d'un condensateur dont la capacité C est égale à 900000 unités C. G. S. électrostatiques et dont les armatures sont chargées à une différence de potentiel V de 1 kilovolt.*

Comme

$$C = \frac{900\,000}{(3 \times 10^{10})^2} = 10^{-15} \text{ unité C. G. S. électromagnétique}$$

et

$$V = 1\,000 \cdot 10^{8} = 10^{11} \text{ unités C. G. S. électromagnétiques,}$$

l'énergie potentielle du condensateur chargé est égale à

$$\frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-15} \cdot 10^{22} = \frac{1}{2} \cdot 10^{7} \text{ ergs.}$$

Elle est transformée en chaleur dans l'étincelle de décharge, qui dégage donc

$$\frac{10^7}{2} \cdot \frac{10^{-3} \cdot 10^{-2}}{981} \cdot \frac{1}{0,425} = 0,12 \text{ calorie (gr-d).}$$

26. — *Deux sphères conductrices électrisées positivement, dont les rayons sont respectivement de 3 décimètres et 1 décimètre, se trouvent dans l'air à une distance suffisante pour que leur influence mutuelle soit insensible et sont chargées respectivement à des potentiels de 7 et 2 unités C. G. S. électrostatiques. Évaluer, en microjoules, la chaleur dégagée quand on les relie entr'elles par un fil conducteur de capacité négligeable.*

Soient, avant la réunion, V_1 et Q_1 le potentiel et la charge de la sphère de rayon R_1, V_2 et Q_2 les mêmes quantités relatives à celle de rayon R_2.

L'influence mutuelle des sphères étant négligeable, l'on a

$$V_1 = K\frac{Q_1}{R_1} \quad \text{et} \quad V_2 = K\frac{Q_2}{R_2}.$$

L'énergie potentielle du système a alors pour expression

$$W = \frac{1}{2}\left(Q_1 V_1 + Q_2 V_2\right) = \frac{1}{2K}\left(V_1^2 R_1 + V_2^2 R_2\right)$$

Lorsqu'on relie les sphères par un fil conducteur dont la capacité peut être négligée, leurs charges prennent des valeurs Q'_1 et Q'_2 telles que

$$Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2 = \frac{1}{K}\left(V_1 R_1 + V_2 R_2\right)$$

et l'on égalise leurs potentiels à la valeur

$$V' = K\frac{Q'_1}{R_1} = K\frac{Q'_2}{R_2} = K\frac{Q'_1 + Q'_2}{R_1 + R_2}$$
$$= \frac{V_1 R_1 + V_2 R_2}{R_1 + R_2}.$$

L'énergie potentielle du système devient

$$W' = \frac{1}{2}\left(Q'_1 + Q'_2\right)V' = \frac{1}{2K}\cdot\frac{(V_1 R_1 + V_2 R_2)^2}{R_1 + R_2}.$$

Elle diminue donc de

$$W - W' = \frac{1}{2\,K}\left(V_1^2 R_1 + V_2^2 R_2 - \frac{V_1^2 R_1^2 + V_2^2 R_2^2 + 2 V_1 V_2 R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)$$
$$= \frac{1}{2\,K} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\left(V_1 - V_2\right)^2.$$

Cette différence, essentiellement positive, représente l'énergie dissipée en chaleur.

Avec

$R_1 = 30$ cm, $R_2 = 10$ cm,
$V_1 = 7 \cdot 3 \times 10^{10}$ et
$V_2 = 2 \cdot 3 \times 10^{10}$ unités C. G. S. électromagnétiques,

on trouve, la valeur de K pour l'air étant $(3 \times 10^{10})^2$,

$$W - W' = \frac{1}{2 \cdot 3^2 \cdot 10^{20}} \cdot \frac{30 \cdot 10}{30 + 10}(7 - 2)^2 \cdot 3^2 \cdot 10^{20} = 93{,}8 \text{ ergs},$$

soit

$$93{,}8 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{6} = 9{,}38 \text{ microjoules}.$$

27. — *Un condensateur plan consiste en trois disques conducteurs parallèles de 2,5 décimètres de rayon, noyés dans l'eau et dont l'un, de 4 millimètres d'épaisseur, est mobile suivant la droite des centres entre les deux autres distants de 3 centimètres. Le disque mobile constitue l'une des armatures et les deux disques fixes, reliés métalliquement, l'autre armature. Ces armatures sont chargées de quantités d'électricité de signes contraires égales à 10 microcoulombs. Si la chaleur maxima que l'étincelle de décharge du système est susceptible de développer atteint 0,00112 calorie (gr-d), quelle est la capacité inductive spécifique de l'eau ?*

La différence de potentiel V entre les armatures du condensateur, chargé de la quantité d'électricité Q donnée, varie avec la position de l'armature mobile. L'énergie

$$W = \frac{1}{2} Q V,$$

transformée en chaleur par l'étincelle de décharge, est donc maxima lorsque la différence de potentiel V est la plus grande.

Or, si d', d'' sont les distances des faces de l'armature mobile

aux faces correspondantes des deux disques de l'armature fixe, fig. 15, et c', c'' les capacités de la première armature par

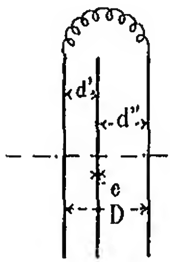

Fig 15.

rapport aux deux disques de la seconde, et si r est le rayon des trois disques,

$$Q = (c' + c'')V = \frac{\pi r^2}{4\pi K}\left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d''}\right)V;$$

d'où l'on tire, en représentant respectivement par e et D l'épaisseur du disque mobile et la distance des faces en regard des disques fixes,

$$V = \frac{4\pi K Q d' d''}{\pi r^2 (D - e)}.$$

Cette expression est maxima lorsque le produit $d' d''$ ou $d'(D - e - d')$ est maximum, ce qui a lieu pour

$$d' = D - e - d'$$

ou

$$d' = \frac{D - e}{2},$$

c'est-à-dire quand le disque mobile est également distant des deux disques fixes.

On a alors

$$V = \frac{4\pi K Q\left(\frac{D - e}{2}\right)^2}{\pi r^2 (D - e)} = \frac{K Q (D - e)}{r^2}$$

et, par suite,

$$W = \frac{K Q^2 (D - e)}{2 r^2}.$$

Cette dernière équation permet de calculer la valeur pour l'eau du coefficient K de la loi de Coulomb, en posant, conformément à l'énoncé du problème,

$$W = 0{,}001\,12 \cdot 0{,}425 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \cdot 981 = 46700 \text{ ergs},$$

$$Q = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-1} \text{ unité C. G. S. électromagnétique},$$

$$r = 25 \text{ cm},$$

$$D - e = 3 - 0{,}4 = 2{,}6 \text{ cm}.$$

On trouve

$$K = \frac{2 \cdot 25^2 \cdot 46700}{10^{-12} \cdot 2{,}6} = 2{,}245 \cdot 10^{19}.$$

Comme le coefficient K vaut $(3 \times 10^{10})^2$ pour l'air, la capacité inductive spécifique de l'eau est égale à

$$\frac{3^2 \cdot 10^{20}}{2{,}245 \cdot 10^{19}}, \quad \text{soit environ } 40.$$

28. — *Un tube conducteur de d = 98 millimètres de diamètre extérieur, suspendu verticalement dans l'air à l'une des extrémités du fléau d'une balance équilibrée, fig. 16, est engagé partiellement dans un tube conducteur coaxial fixe de D = 100 millimètres de diamètre intérieur. De combien de milligrammes faut-il charger l'autre extrémité du fléau, pour maintenir l'horizontalité de celui-ci, lorsque les deux tubes sont raccordés aux pôles d'une pile dont la force électromotrice E est égale à 1000 volts?*

Soit F le poids cherché.

L'énergie potentielle du condensateur de capacité C, constitué par les deux tubes se recouvrant sur une hauteur a, est

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C},$$

$\pm Q$ désignant la charge que la différence de potentiel E communique aux armatures.

Si, la liaison avec la pile ayant été supprimée, on laissait descendre le tube mobile d'une hauteur da sous l'attraction du tube fixe, attraction dont la direction est axiale par raison de

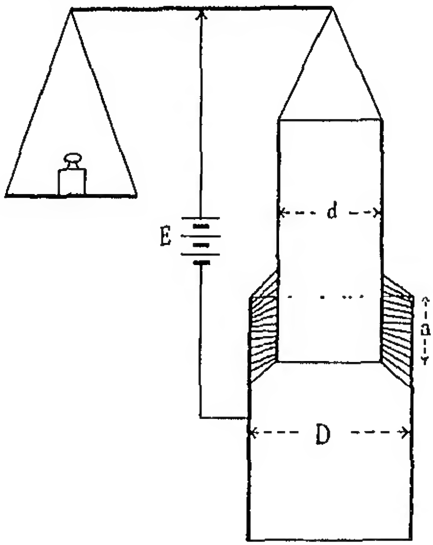

Fig 16

symétrie, le travail Fda effectué serait égal à la diminution $-dW$ de cette énergie potentielle et, la charge Q demeurant constante, on aurait

$$-dW = -\frac{1}{2} Q^2 \cdot d\frac{1}{C} = \frac{1}{2} Q^2 \frac{dC}{C^2}.$$

Dès lors, si l'on peut admettre que le déplacement étend simplement la zone médiane du champ, où les lignes de force rayonnent normalement à l'axe des tubes et dans laquelle la capacité par unité de hauteur est

$$\frac{1}{2 K \log_e \frac{D}{d}},$$

il vient

$$Fda = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{da}{2 K \log_e \frac{D}{d}};$$

d'où l'on tire, en remarquant que $Q = CE$,

$$F = \frac{E^2}{4\,K\,\log_e \frac{D}{d}}.$$

Avec

$$E = 1\,000 \cdot 10^8 \text{ unités C. G. S. électromagnétiques},$$
$$K = (3 \times 10^{10})^2$$

et

$$\log_e \frac{100}{98} = 0{,}02,$$

on trouve

$$F = \frac{10^{22}}{4 \cdot 3^2 \cdot 10^{20} \cdot 0{,}02} = 139 \text{ dynes}$$

ou

$$\frac{139 \cdot 10^3}{981} = 142 \text{ milligrammes.}$$

29. — *Deux condensateurs, dont le diélectrique est l'air, ont des capacités de 0,01 microfarad et sont reliés en série aux pôles d'une pile développant une force électromotrice égale à 3 unités C. G. S. électrostatiques. Quelle est l'énergie que la pile développe quand on coule de la paraffine entre les armatures de l'un des condensateurs et, abstraction faite de l'effet Joule, que devient cette énergie ?*

Soit C la capacité de chacun des condensateurs avant la coulée de la paraffine. Reliés en tension à la pile de force électromotrice E, les deux condensateurs sont alors chargés d'une même quantité d'électricité Q_0 et la même différence de potentiel E/2 existe entre leurs armatures ; on a

$$Q_0 = \frac{1}{2}\,C\,E.$$

En versant entre les armatures de l'un des condensateurs de la paraffine dont le pouvoir inducteur spécifique est γ, on porte la capacité de ce condensateur à la valeur $C' = \gamma C$. La capacité

combinée de deux condensateurs, de capacités C et C′, disposés en cascade étant

$$\frac{1}{\frac{1}{C}+\frac{1}{C'}}=\frac{C\,C'}{C+C'},$$

les charges des deux condensateurs, nécessairement toujours égales, deviennent, après l'introduction de la paraffine dans un des appareils,

$$Q=\frac{C\,C'}{C+C'}\,E=\frac{\gamma\,C^2}{C+\gamma\,C}\,E=\frac{\gamma}{1+\gamma}\,C\,E.$$

La modification d'un des diélectriques a donc obligé la pile à fournir une énergie

$$W=E\,(Q-Q_0)=\frac{1}{2}\,\frac{\gamma-1}{1+\gamma}\,C\,E^2.$$

En faisant, dans le dernier membre de l'équation précédente,

$C=0{,}01\,.\,10^{-6}\,.\,10^{-9}=10^{-17}$ unité C. G. S électromagnétique,

$E=3\,.\,3\times10^{10}=9\,.\,10^{10}$ unités C. G. S électromagnétiques,

$\gamma=2{,}32,$

on trouve

$$W=\frac{1}{2}\,\frac{2{,}32-1}{1+2{,}32}\,.\,10^{-17}\,.\,9^2\;10^{20}=16\,100\text{ ergs},$$

soit

$$16\,100\,.\,10^{-7}=0{,}00161\text{ joule}.$$

Dans l'hypothèse d'une résistance électrique nulle, cette énergie ne peut avoir servi qu'à augmenter l'énergie potentielle des condensateurs ou à effectuer un travail.

Avant la coulée de la paraffine, l'énergie potentielle du système des deux condensateurs était

$$2\,.\,\frac{1}{2}\,Q_0\,\frac{E}{2}=\frac{1}{4}\,C\,E^2.$$

Après cette opération, elle est, en désignant par V et V′ respec-

tivement la différence de potentiel des armatures du condensateur à air et celle des armatures du condensateur à paraffine,

$$\frac{1}{2}QV + \frac{1}{2}QV' = \frac{1}{2}QE = \frac{1}{2}\,\frac{\gamma}{1+\gamma}\,CE^2.$$

L'énergie potentielle des condensateurs s'est donc accrue de

$$\frac{1}{2}\,\frac{\gamma}{1+\gamma}\,CE^2 - \frac{1}{4}CE^2 = \frac{1}{4}\,\frac{\gamma-1}{1+\gamma}\,CE^2 = \frac{1}{2}W.$$

Son augmentation ne représente que la moitié de l'énergie totale développée par la pile, dont l'autre moitié correspond au travail effectué, pendant la coulée de la paraffine, par l'attraction que les armatures du condensateur en jeu exercent sur cette substance polarisée, suivant les idées de Maxwell, sous l'influence du champ électrostatique.

30. — *Quatre condensateurs C_1, C_2, C_3, C_4, de mêmes dimensions, mais qui ont respectivement pour diélectrique l'air, la paraffine, le soufre et le verre, sont reliés entr'eux comme l'indique la fig. 17. L'armature libre de C_1 est portée à un potentiel V de 100 volts, tandis que celle de C_4 est en communication avec la terre. Calculer, en volts, la différence de potentiel des armatures des divers condensateurs et exprimer, en unités C. G. S. électrostatiques, la charge Q_2 du condensateur C_2 dans l'hypothèse où la capacité de ce condensateur est de 0,001 microfarad.*

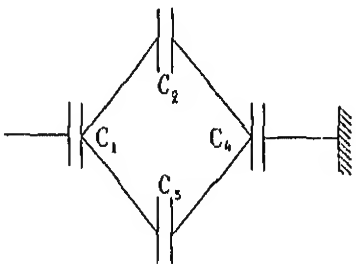

Fig. 17

Les deux appareils dont les capacités sont C_2 et C_3 se comportent comme un condensateur unique, de capacité $C_0 = C_2 + C_3$, mis en série avec les capacités C_1 et C_4.

Les trois condensateurs C_1, C_0 et C_4 acquérant nécessairement la même charge Q à cause du groupement en cascade, les différences de potentiel à leurs bornes sont

$$V_1 = \frac{Q}{C_1}, \qquad V_0 = \frac{Q}{C_0}, \qquad V_4 = \frac{Q}{C_4}.$$

Mais on a

$$V = V_1 + V_0 + V_4 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_4}\right);$$

d'où l'on tire

$$Q = V\left(\frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_4}}\right) = VC,$$

en posant

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_4}}.$$

Par suite,

$$V_1 = V\frac{C}{C_1}, \qquad V_0 = V\frac{C}{C_0}, \qquad V_4 = V\frac{C}{C_4}.$$

En adoptant, comme valeur de la capacité inductive spécifique rapportée à l'air, 2,32 pour la paraffine, 3,84 pour le soufre, 6 pour le verre, il vient

$$C_2 = 2{,}32\,C_1, \quad C_3 = 3{,}84\,C_1, \quad C_4 = 6\,C_1, \quad C_0 = C_2 + C_3 = 6{,}16\,C_1,$$

$$C = \frac{C_1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{6{,}16} + \frac{1}{6}} = 0{,}753\,C_1$$

et l'on trouve

$$V_1 = 100 \cdot \frac{0{,}753}{1} = 75{,}3 \text{ volts},$$

$$V_0 = 100 \cdot \frac{0{,}753}{6{,}16} = 12{,}2 \text{ volts},$$

$$V_4 = 100 \cdot \frac{0{,}753}{6} = 12{,}5 \text{ volts}.$$

D'ailleurs, si $C_2 = 0{,}001 \cdot 10^{-6}$ farad,

$$Q_2 = C_2 V_0 = 0{,}001 \cdot 10^{-6} \cdot 12{,}2 = 1{,}22 \cdot 10^{-8} \text{ coulomb},$$

soit

$$1{,}22 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-1} \cdot 3 \times 10^{10} = 36{,}6 \text{ unités C. G. S. électrostatiques.}$$

31. — *Cinq condensateurs A, B, C, D, E sont reliés entr'eux comme l'indique la fig. 18. A quelle relation doivent satisfaire les capacités des quatre premiers condensateurs pour que la charge du dernier reste nulle quand on applique aux points Z et Y les pôles d'un générateur électrique de force électromotrice constante et quelle est, en unités C. G. S. électrostatiques, la charge que prend cet appareil dans le cas où les capacités des condensateurs sont égales respectivement à 1, 2, 3, 4, 5 microfarads et où la force électromotrice agissante mesure 100 volts ?*

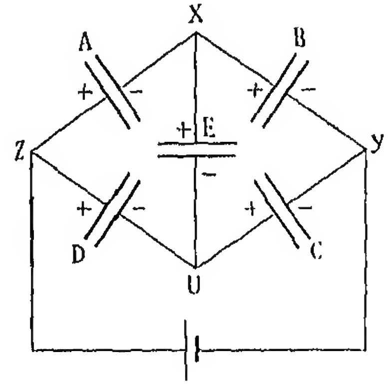

Fig. 18

Désignons par C_a, C_b, C_c, C_d, C_e et par Q_a, Q_b, Q_c, Q_d, Q_e les capacités et les charges des condensateurs A, B, C, D, E ; par V_z, V_y, V_x, V_u les potentiels des points Z, Y, X, U. Supposons que $V_z > V_y$ et $V_x > V_u$.

On a les relations évidentes :

$$Q_a + Q_d = Q_b + Q_c$$

ou

$$C_a(V_z - V_x) + C_d(V_z - V_u) = C_b(V_x - V_y) + C_c(V_u - V_y), \quad (1)$$

$$-Q_a + Q_e + Q_b = 0$$

ou

$$-C_a(V_z - V_x) + Q_e + C_b(V_x - V_y) = 0 \quad (2)$$

et

$$Q_e = C_e(V_x - V_u). \quad (3)$$

L'équation (2) donne

$$V_x = \frac{-Q_e + C_a V_z + C_b V_y}{C_a + C_b}$$

et, en remplaçant V_x par cette expression dans l'équation (1), on tire de celle-ci

$$V_u = \frac{Q_e + C_d V_z + C_c V_y}{C_c + C_d}.$$

Introduisons les valeurs ci-dessus de V_x et V_u dans l'équation (3) :

$$Q_e = C_e\left(\frac{-Q_e + C_a V_z + C_b V_y}{C_a + C_b} - \frac{Q_e + C_d V_z + C_c V_y}{C_c + C_d}\right).$$

En résolvant l'équation résultante par rapport à Q_e, il vient

$$Q_e = \frac{C_e(C_a C_c - C_b C_d)}{(C_a + C_b)(C_c + C_d) + C_e(C_a + C_b + C_c + C_d)}(V_z - V_y).$$

La condition $Q_e = 0$ exige que $C_a C_c = C_b C_d$.

Lorsque, en microfarads, $C_a = 1$, $C_b = 2$, $C_c = 3$, $C_d = 4$, $C_e = 5$, et que $(V_z - V_y) = 100$ volts, on trouve

$$Q_e = \frac{5(1.3 - 2.4)}{(1+2)(3+4) + 5(1+2+3+4)}\,100$$
$$= -35{,}2 \text{ microcoulombs},$$

soit

$$-35{,}2 \times 10^{-6} \times 10^{-1} \times 3 \times 10^{10}$$
$$= -105\,600 \text{ unités C. G. S. électrostatiques.}$$

Le signe négatif montre qu'alors, contrairement à ce qu'on a supposé, $V_x < V_u$.

Chapitre III.

LOIS DU COURANT ÉLECTRIQUE.

---

32. — *Quelle doit être l'épaisseur de la couche diélectrique, de résistivité $\rho = 350$ méga-mégohms-centimètres, d'un câble télégraphique sous-marin, dont le conducteur a un diamètre de $2a = 2$ millimètres, pour que la résistance d'isolement atteigne $r = 500$ mégohms par mille marin (1852 mètres)?*

La résistance élémentaire opposée au courant de perte par un cylindre isolant, concentrique au conducteur, de longueur l suivant l'axe du câble, de rayon x et d'épaisseur dx est

$$dr = \rho \frac{dx}{2\pi x l}.$$

Sur la longueur considérée, la résistance d'isolement de la couche diélectrique entière, d'épaisseur radiale ε, est donc

$$r = \frac{\rho}{2\pi l}\int_a^{a+\varepsilon} \frac{dx}{x} = \frac{\rho}{2\pi l}\log_e \frac{a+\varepsilon}{a}.$$

Si, pour $l = 185200$ cm, r doit être égal à 300 mégohms avec $\rho = 350 \cdot 10^6$ mégohms-cm, il faut que

$$\log_e \frac{a+\varepsilon}{a} = \frac{2\pi l r}{\rho} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 185200 \cdot 300}{350 \cdot 10^6} = 0{,}997\,;$$

d'où l'on tire

$$\frac{a+\varepsilon}{a} = 2{,}7$$

et, comme $a = 1$ mm,

$$\varepsilon = 1\,(2{,}7 - 1) = 1{,}7 \text{ mm}.$$

33. — *Quelle est l'intensité du courant électrique qui élèverait en 1 seconde de 1 degré centigrade la température d'un conducteur en cuivre dont la section mesure 1 millimètre carré, la résistivité 1,7 microhm-centimètre, la densité 8,9 grammes-masse par centimètre cube, la chaleur spécifique 0,095 petites calories par gramme-masse et par degré centigrade, dans l'hypothèse d'une déperdition de chaleur nulle?*

Soient T secondes la durée de passage du courant et t degrés centigrades l'élévation de température; i et ρ l'intensité du courant en ampères et la résistivité du métal en ohms-cm; δ la densité de celui-ci en grammes-masse par cm³; c sa chaleur spécifique en calories (gr-d) par gramme-masse et par degré centigrade; l cm et s cm² la longueur et la section du conducteur; a l'équivalent mécanique de la chaleur en joules par petite calorie.

L'énergie électrique transformée en chaleur par effet Joule pendant le temps considéré est $i^2 \cdot \rho \frac{l}{s} \cdot \mathrm{T}$ joules. Elle représente $i^2 \rho \frac{l}{s} \mathrm{T} \cdot \frac{1}{a}$ petites calories.

En l'absence de tout refroidissement, cette quantité de chaleur est aussi égale, en petites calories, au produit de la capacité thermique c par la masse $l s \delta$ du conducteur et par l'élévation de température t.

On a donc la relation

$$i^2 \rho \frac{l}{s} \mathrm{T} \frac{1}{a} = c\, l\, s\, \delta\, t,$$

d'où l'on tire

$$i = s\sqrt{a\,\frac{c\,\delta\,t}{\rho\,T}}.$$

Avec

$s = 0{,}01$ cm²,
$c = 0{,}095$ calories (gr-d) par gramme et par degré,
$\delta = 8{,}9$ grammes par cm³,
$\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-6}$ ohm-cm,
$t = 1$ degré,
$T = 1$ seconde,

on obtient, puisque

$$a = 0{,}425 \cdot 10^4 \cdot 10^2 \cdot 981 \cdot 10^{-7} = 4{,}17 \text{ joules par petite calorie,}$$

$$i = 0{,}01\sqrt{4{,}17 \cdot \frac{0{,}095 \cdot 8{,}9}{1{,}7 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{1}{1}} = 14{,}4 \text{ ampères.}$$

34. — *Quelle est la différence de potentiel maxima entre deux points d'un circuit électrique formé par la juxtaposition bout à bout de deux conducteurs ABC et CDA, fig. 19, dont les résistances mesurent respectivement $r_1 = 0{,}0001$ et $r_2 = 0{,}0003$*

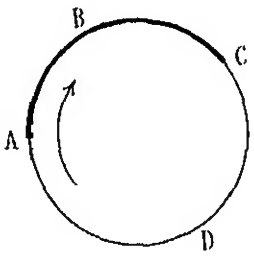

Fig. 19.

ohm par centimètre de longueur et les longueurs $l_1 = 40$ et $l_2 = 60$ centimètres, quand ce circuit est le siège, par induction électromagnétique, d'une force électromotrice constante agissant dans le sens de la flèche et uniformément répartie à raison de $\varepsilon = 0{,}001$ volt par centimètre de longueur ?

Représentons, fig. 20, en coordonnées rectangulaires, les variations, le long du circuit, de la résistance r, de la force

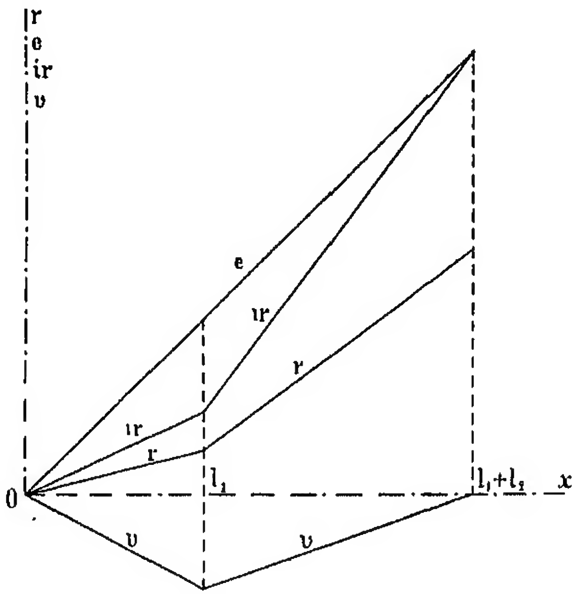

Fig 20.

électromotrice induite e, de la chute de tension ir et de la différence de potentiel v comptées, à partir du point A par exemple, dans le sens de la force électromotrice.

Portons en abscisses les distances x au point A. Pour le point C, $x = l_1$; pour le point A, $x = o$ ou $l_1 + l_2$.

La résistance r étant égale à

$$r_1 x \quad \text{lorsque } o < x < l_1$$

et à

$$r_1 l_1 + r_2 (x - l_1) \quad \text{lorsque } l_1 < x < l_1 + l_2,$$

son diagramme est une droite, brisée au point de jonction C des deux conducteurs et définie par les ordonnées o à l'origine, $r_1 l_1$ à la distance l_1 et $(r_1 l_1 + r_2 l_2)$ à la distance $(l_1 + l_2)$.

La force électromotrice e, variant suivant l'expression

$$e = \varepsilon x$$

dans toute l'étendue du circuit, est figurée par une droite dont les ordonnées extrêmes sont o et $\varepsilon\,(l_1 + l_2)$.

L'intensité du courant, qui est évidemment la même en tous les points du circuit, est donnée par la loi d'Ohm appliquée à l'ensemble de celui-ci :

$$i = \frac{\varepsilon\,(l_1 + l_2)}{r_1\,l_1 + r_2\,l_2}.$$

La chute de tension entre le point A et un autre point du circuit à la distance x du premier est

$$i\,r = i\,r_1\,x$$

ou

$$i\,r = i\left\{r_1\,l_1 + r_2\,(x - l_1)\right\},$$

suivant que le second point considéré appartient au conducteur ABC ou au conducteur CDA. Le diagramme de ir se compose donc de deux droites se raccordant au droit de l'abscisse l_1, où leur ordonnée commune est

$$i\,r_1\,l_1 = \frac{\varepsilon\,(l_1 + l_2)}{r_1\,l_1 + r_2\,l_2}\,r_1\,l_1.$$

dont l'une part de l'origine et dont l'autre aboutit à l'ordonnée terminale du diagramme de e, puisque, pour $x = l_1 + l_2$, $i\,r = \varepsilon\,(l_1 + l_2)$.

Enfin, le diagramme de la différence de potentiel $v = -(e - ir)$, qui est négative parce qu'elle est considérée du point A vers les autres points du circuit, résulte de la soustraction des ordonnées correspondantes des diagrammes de e et de ir. C'est, par suite, une droite brisée dont les ordonnées extrêmes sont nulles et dont l'ordonnée maxima en valeur absolue correspond à l'abscisse l_1. La plus grande différence de potentiel existant dans le circuit est donc égale à

$$\varepsilon\,l_1 - \frac{\varepsilon\,(l_1 + l_2)}{r_1\,l_1 + r_2\,l_2}\,r_1\,l_1 = \frac{\varepsilon\,l_1\,l_2\,(r_2 - r_1)}{r_1\,l_1 + r_2\,l_2}.$$

Avec

$\varepsilon = 0{,}001$ volt par cm,

$r_1 = 0{,}0001$ ohm par cm,

$r_2 = 0{,}0003$ ohm par cm,

$l_1 = 40$ cm et $l_2 = 60$ cm

on trouve

$$\frac{\varepsilon\, l_1\, l_2\, (r_2 - r_1)}{r_1\, l_1 + r_2\, l_2} = \frac{0{,}001 \,.\, 40 \,.\, 60 \,.\, (0{,}0003 - 0{,}0001)}{0{,}0001 \,.\, 40 + 0{,}0003 \,.\, 60} = 0{,}0218 \text{ volt.}$$

On remarquera que, si la résistance linéaire du circuit était invariable ($r_1 = r_2$), la chute de tension ir serait partout égale à la force électromotrice e et il n'existerait aucune différence de potentiel.

35. — *Deux conducteurs parallèles identiques réalisent, lorsqu'ils sont indépendants, un condensateur d'une capacité C de 0,001 microfarad. En les soumettant à un bout à une différence de potentiel continue V de 6 volts, après les avoir mis en contact à l'autre bout, quelle charge et quelle énergie potentielle électrostatique leur communique-t-on ?*

Soit $I = V/R$ l'intensité du courant que la différence de potentiel V produit dans le circuit, de résistance totale R, formé par les deux conducteurs bouclés.

Désignons par L la longueur de chacun des fils, par $c = C/L$ la capacité linéaire de leur ensemble et par $r = R/2L$ la résistance linéaire du circuit.

A la distance l, comptée à partir de l'extrémité commune, existe entre les deux conducteurs une différence de potentiel

$$v = 2\, r\, l\, I,$$

de sorte qu'à l'élément de capacité $c\,dl$ correspondent une charge

$$dq = c\, dl \,.\, v = 2\, c\, r\, I\, l\, dl$$

et une énergie potentielle électrostatique

$$dw = \frac{1}{2}\, v\, dq = 2\, c\, r^2\, I^2\, l^2\, dl.$$

La charge et l'énergie potentielle électrostatique du système entier sont donc

$$q = 2\, c\, r\, I \int_0^L l\, dl = \frac{1}{2}\, c\, L \,.\, 2\, r\, L \,.\, I = \frac{1}{2}\, C\, R\, I = \frac{1}{2}\, C\, V$$

et

$$w = 2cr^2 I^2 \int_0^L l^2\,dl = \frac{1}{6}\,c\,L\,(2rL)^2\,I^2 = \frac{1}{6}\,C\,R^2\,I^2 = \frac{1}{6}\,C\,V^2.$$

Dans le cas où $C = 0{,}001 \,.\, 10^{-6}$ farad et $V = 6$ volts,

$$q = \frac{1}{2}\,0{,}001 \,.\, 10^{-6} \,.\, 6 = 0{,}003 \,.\, 10^{-6} \text{ coulomb}$$

et

$$w = \frac{1}{6}\,0{,}001 \,.\, 10^{-6} \,.\, 6^2 = 0{,}006 \,.\, 10^{-6} \text{ joule.}$$

36. — *Soit un condensateur d'une capacité C de 3 microfarads et dont le diélectrique possède une résistance d'isolement infinie. La charge Q de l'appareil étant de 0,0003 coulomb, on relie les armatures pendant T = 20 secondes à une résistance R de 0,03 mégohms. Que devient la charge du condensateur et sous quelle différence de potentiel moyenne s'est opérée la décharge ?*

Soient q et v la charge et la différence de potentiel des armatures du condensateur à un instant quelconque t compté à partir du commencement de la décharge :

$$q = Cv.$$

En égalant les deux expressions

$$\frac{v}{R} = \frac{q}{CR} \quad \text{et} \quad -\frac{dq}{dt}$$

de l'intensité instantanée du courant de décharge, on a la relation

$$dt = -CR\,\frac{dq}{q},$$

d'où l'on tire

$$\int_0^t dt = -CR \int_Q^q \frac{dq}{q}$$

ou

$$t = CR \log_e \frac{Q}{q}.$$

Si, dans la dernière équation, on fait

$t = T = 20$ secondes, $\quad C = 3 \cdot 10^{-6}$ farad, $\quad R = 9{,}63 \cdot 10^{6}$ ohms,

on trouve

$$\log_e \frac{Q}{q} = \frac{T}{CR} = \frac{20}{3 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}63 \cdot 10^{6}} = 0{,}693,$$

de sorte que, comme 0,693 est le logarithme népérien de 2, la quantité d'électricité restante se réduit à

$$q = \frac{Q}{2} = \frac{0{,}000\,3}{2} = 0{,}000\,15 \text{ coulomb}.$$

D'autre part, l'égalité

$$t = CR \log_e \frac{Q}{Cv}$$

pouvant se mettre sous la forme

$$v = \frac{Q}{C} e^{-\frac{t}{CR}},$$

on obtient, pour la valeur moyenne de la différence de potentiel des armatures pendant la décharge,

$$\frac{1}{T}\int_0^T v\,dt = \frac{Q}{CT}\int_0^T e^{-\frac{t}{CR}}\,dt = \frac{QR}{T}\left(1 - e^{-\frac{T}{CR}}\right)$$

$$= \frac{0{,}000\,3 \cdot 9{,}63 \cdot 10^{6}}{20}\left(1 - e^{-\frac{20}{3 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}63 \cdot 10^{6}}}\right) = 72{,}2 \text{ volts},$$

car, en posant

$$x = e^{-\frac{20}{3 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}63 \cdot 10^{6}}} = e^{-0{,}693},$$

on voit que

$$\log_e \frac{1}{x} = 0{,}693 \quad \text{et, par suite,} \quad \frac{1}{x} = 2.$$

37. — *Un voltamètre, dont les électrodes sont des lames de zinc et l'électrolyte du sulfate de zinc dissous dans l'eau, est dérivé sur un shunt formé d'un alliage dont la résistivité ne varie pas sensiblement avec la température et intercalé dans un circuit parcouru par un courant continu I de 100 ampères, fig. 21. Une bobine en fil de cuivre est ajoutée en série au voltamètre pour rendre l'intensité*

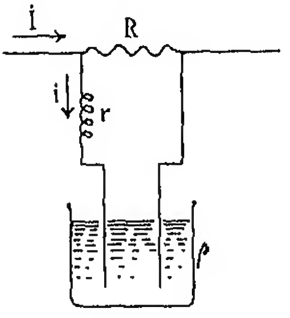

Fig. 21.

i du courant dérivé dans celui-ci indépendante de la température ambiante. Quelles doivent être, à 15° C, les résistances R du shunt, ρ du voltamètre et r de la bobine pour obtenir par heure un dépôt de $p = 1{,}7$ gramme de zinc sur la cathode, étant donné que l'équivalent électrochimique ε de ce métal est de 0,337 milligramme par coulomb, que la résistivité de la solution de sulfate de zinc diminue de $a = 1{,}5$ pour 100 de sa valeur à 0° C quand la température s'élève de 1 degré centigrade, tandis que celle du cuivre augmente, dans ces conditions, de $b = 0{,}4$ pour 100, et que la perte de puissance W par effet Joule dans le shunt et son circuit dérivé est fixée à 200 watts ?

Le dépôt de zinc à obtenir par heure sur la cathode du voltamètre définit l'intensité du courant à travers celui-ci :

$$i = \frac{p}{3600\,\varepsilon}.$$

Les résistances cherchées sont liées aux courants I et i, d'une part, par la seconde loi de Kirchhoff, qui, en l'absence de force contre-électromotrice dans le voltamètre, doit s'écrire

$$(I - i)\,R - i\,(\rho + r) = 0,$$

et, d'autre part, par l'expression de l'effet Joule

$$W = (I - i)^2 R + i^2 (\rho + r).$$

Ces deux relations déterminent les résistances R et $(\rho + r)$. On en tire

$$R = \frac{W}{(I - i)\,I}$$

et

$$\rho + r = \frac{W}{I\,i}.$$

La résistance R étant indépendante de la température ambiante, pour que le courant

$$i = I \frac{R}{R + (\rho + r)}$$

ne change pas avec celle-ci, il faut que la somme des résistances du circuit dérivé demeure invariable. ρ et r étant les valeurs des deux termes de cette somme à une température quelconque t, si ρ_0 et r_0 sont leurs valeurs à 0° C, on doit donc avoir

$$\rho + r = \rho_0 (1 - at) + r_0 (1 + bt) = \text{constante};$$

ce qui exige que

$$a \rho_0 = b r_0$$

ou que

$$a \frac{\rho}{1 - at} = b \frac{r}{1 + bt}.$$

En introduisant cette condition dans l'équation

$$\rho + r = \frac{W}{I\,i},$$

on trouve

$$\rho = \frac{W}{I\,i} \cdot \frac{b(1 - at)}{a(1 + bt) + b(1 - at)}$$

et

$$r = \frac{W}{I\,i} \cdot \frac{a(1 + bt)}{a(1 + bt) + b(1 - at)}.$$

Si l'on pose

$$p = 1{,}7 \text{ gramme}, \quad \varepsilon = 0{,}000337 \text{ gramme par coulomb},$$
$$W = 200 \text{ watts}, \quad I = 100 \text{ ampères}, \quad a = 0{,}015, \quad b = 0{,}004, \quad t = 15^\circ,$$

il vient

$$i = \frac{1{,}7}{3600 \cdot 0{,}000337} = 1{,}4 \text{ ampère},$$

$$R = \frac{200}{(100 - 1{,}4)\,100} = 0{,}0203 \text{ ohm},$$

$$\rho = \frac{200}{100 \cdot 1{,}4} \cdot \frac{0{,}004\,(1 - 0{,}015 \cdot 15)}{0{,}015\,(1 + 0{,}004 \cdot 15) + 0{,}004\,(1 - 0{,}015 \cdot 15)}$$
$$= 0{,}233 \text{ ohm},$$

$$r = \frac{200}{100 \cdot 1{,}4} \cdot \frac{0{,}015\,(1 + 0{,}004 \cdot 15)}{0{,}015\,(1 + 0{,}004 \cdot 15) + 0{,}004\,(1 - 0{,}015 \cdot 15)}$$
$$= 1{,}195 \text{ ohm}.$$

38. — *Combien d'éléments de pile, ayant une force électromotrice E de 1,1 volt et une résistance intérieure ρ de 0,5 ohm, faut-il pour décomposer, en 10 heures, 50 grammes d'eau dans un voltamètre dont la résistance r mesure 0,0003 ohm et qui développe une force contre-électromotrice e de 1,5 volt, si l'on désire que le rendement η, égal au rapport de la puissance utilisée par l'électrolyse à la puissance totale fournie par la pile, ne soit pas inférieur à 60 pour 100? Les conducteurs de raccordement ont ensemble une résistance R = 0,0145 ohm. L'équivalent électrochimique de l'hydrogène est 0,01038 milligramme par coulomb et le poids atomique de l'oxygène est 16.*

Soit n le nombre d'éléments cherché. Si ces éléments sont associés par s en série et n/s en dérivation, l'intensité du courant débité par la pile et le rendement ont respectivement pour expression

$$i = \frac{sE - e}{\frac{s^2\rho}{n} + R + r}$$

et

$$\eta = \frac{ei}{sEi} = \frac{e}{sE}.$$

D'après la deuxième équation, mise sous la forme $s = e/\rho_1 E$, il faut que

$$s = \frac{1,5}{0,6 \cdot 1,1} = 2,27.$$

Le nombre entier $s = 2$, à adopter, procure un rendement

$$\rho_1 = \frac{1,5}{2 \cdot 1,1} = 0,682.$$

s étant déterminé, la première équation permet de calculer n, si i est connu :

$$n = \frac{i s^2 \rho}{sE - e - i(R + r)}.$$

Or, l'équivalent chimique de l'eau (H^2O) étant

$$1 + \frac{16}{2} = 9,$$

un coulomb décompose 0,00001038 . 9 = 0,0000934 gramme d'eau, de sorte que, pour électrolyser 50 grammes d'eau en 10 heures, il faut un courant de

$$\frac{50}{0,0000934 \cdot 10 \cdot 3600} = 14,85 \text{ ampères}.$$

Par suite,

$$n = \frac{14,85 \cdot 2^2 \cdot 0,5}{2 \cdot 1,1 - 1,5 - 14,85\,(0,0145 + 0,0003)} = 62 \text{ éléments}.$$

39. — *Deux tiges conductrices, dont la résistance mesure $r = 5000$ microhms par centimètre courant, reposent verticalement, fig. 22, sur le fond d'un récipient isolant contenant, jusqu'à une hauteur h de 50 centimètres, un électrolyte qui développe une force contre-électromotrice E de 1 volt. Lorsqu'une source d'électricité, reliée aux extrémités supérieures des tiges, envoie dans le liquide un courant continu I de 10,5 ampères, les différences de potentiel entre les tiges aux points où celles-ci émergent du liquide et touchent le fond du récipient sont respectivement de $V = 3$ volts et $v = 1,375$ volts. Quelle résistance électrique le liquide oppose-t-il au courant ?*

Désignons la résistance cherchée par R.

Soient i la partie du courant I qui passe d'une tige à l'autre à travers l'épaisseur de liquide x comptée à partir de la surface

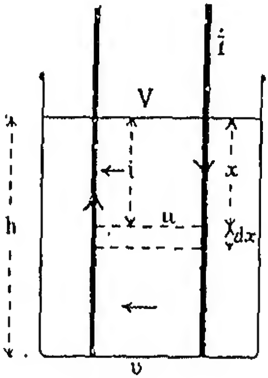

Fig. 22.

et u la différence de potentiel entre les tiges à la profondeur x. Le courant dérivé dans la tranche liquide d'épaisseur dx est

$$di = \frac{u - E}{R\dfrac{h}{dx}} = \frac{u - E}{Rh}\,dx$$

et la chute de tension occasionnée par le courant $(I - i)$ dans la résistance $2\,r\,dx$ des tronçons dx des deux tiges

$$-\,du = 2\,r\,(I - i)\,dx.$$

En éliminant dx entre les deux équations précédentes, il vient

$$2\,r\,Rh\,(I - i)\,di = -\,(u - E)\,du\,;$$

d'où l'on tire

$$2\,r\,R\,h\int_0^I (I - i)\,di = -\int_V^v (u - E)\,du,$$

soit

$$2\,r\,R\,h\left[I\,i - \frac{i^2}{2}\right]_0^I = -\left[\frac{u^2}{2} - E\,u\right]_V^v$$

ou

$$R = \frac{1}{rh\,I^2}(V - v)\left(\frac{V + v}{2} - E\right).$$

Avec

$V = 3$ volts, $\quad v = 1{,}375$ volt, $\quad E = 1$ volt,

$r = 5000 \cdot 10^{-6} = 0{,}005$ ohm par cm, $\quad h = 50$ cm,

$I = 10{,}5$ ampères,

on trouve

$$R = \frac{1}{0{,}005 \cdot 50 \cdot 10{,}5^2}(3 - 1{,}375)\left(\frac{3 + 1{,}375}{2} - 1\right) = 0{,}07 \text{ ohm}.$$

Il est à noter que la différence de potentiel v n'est pas une donnée arbitraire, indispensable pour la résolution du problème, qu'elle facilite.

Des quantités V, E, I, rh et R, quatre déterminent la cinquième.

En effet, de

$$di = \frac{u - E}{Rh}\,dx \quad \text{et} \quad -du = 2r(I - i)\,dx$$

on déduit

$$d(u - E) = du = -2r(I - i)\frac{Rh}{u - E}\,di$$

et, par suite,

$$\int_V^u (u - E)\,d(u - E) = -2rRh\int_0^i (I - i)\,di,$$

c'est-à-dire

$$\left|\frac{(u - E)^2}{2}\right|_V^u = -2rRh\left|Ii - \frac{i^2}{2}\right|_0^i$$

ou

$$(u - E)^2 - (V - E)^2 = -2rRh(2Ii - i^2).$$

En remplaçant $(u - E)$ par $Rh\,di/dx$, on obtient

$$Rh\frac{di}{dx} = \sqrt{(V - E)^2 - 2rRh(2Ii - i^2)};$$

d'où, en posant $(V-E)^2 = a$, $-4rRhI = 2b$ et $2rRh = c$,

$$\int_0^I \frac{di}{\sqrt{a+2bi+ci^2}} = \frac{1}{Rh}\int_0^h dx.$$

Comme $c = 2rRh > 0$, l'intégrale est

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\Big|\log_e\Big(b+ci+\sqrt{c}\sqrt{a+2bi+ci^2}\Big)\Big|_0^I = \frac{1}{R}$$

ou

$$\frac{b+cI+\sqrt{c}\sqrt{a+2bI+cI^2}}{b+\sqrt{ca}} = e^{\frac{\sqrt{c}}{R}}.$$

En remarquant que $b = -cI$, on peut écrire

$$\frac{\sqrt{a-cI^2}}{-\sqrt{c}\,I+\sqrt{a}} = e^{\frac{\sqrt{c}}{R}}$$

ou encore

$$\frac{a-cI^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{c}\,I)^2} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}\,I}{\sqrt{a}-\sqrt{c}\,I} = e^{\frac{2\sqrt{c}}{R}},$$

de sorte que

$$I = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}\cdot\frac{e^{\frac{2\sqrt{c}}{R}}-1}{e^{\frac{2\sqrt{c}}{R}}+1} = \frac{V-E}{\sqrt{2rRh}}\cdot\frac{e^{2\sqrt{\frac{2rh}{R}}}-1}{e^{2\sqrt{\frac{2rh}{R}}}+1}.$$

40. — *Un générateur, présentant une résistance intérieure ρ de 0,05 ohm, développe une force électromotrice E de 110 volts. A ses bornes sont raccordés deux conducteurs en cuivre (résistivité = 1,8 microhm-centimètre), d'une longueur de 30 mètres et d'un diamètre de 5 millimètres, qui aboutissent à un groupe de lampes à incandescence offrant une résistance combinée de 2 ohms. Un électromoteur, d'une résistance intérieure r de 0,5 ohm et qui est le siège d'une force contre-électromotrice e*

de 100 volts, est en outre dérivé sur la ligne, au milieu de sa longueur, à l'aide de conducteurs de résistance négligeable. Calculer 1° l'intensité I du courant débité par le générateur, ainsi que les intensités i et i' des courants absorbés par le moteur et par les lampes; 2° les différences de potentiel V, v et v' existant respectivement aux bornes du générateur, aux bornes du moteur et à l'extrémité de la ligne; 3° la puissance électrique totale produite par le générateur, la puissance fournie au moteur, celle utilisée par le groupe de lampes et celle dissipée dans la ligne.

Le système est représenté par le schéma de la fig. 23, où R désigne la résistance du générateur et du tronçon de ligne

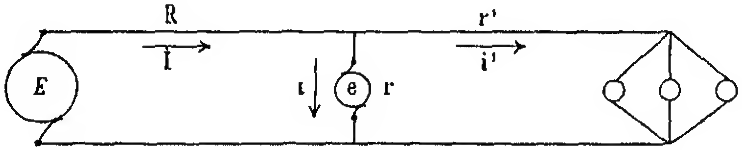

Fig. 23

compris entre celui-ci et le moteur, tandis que r' est la résistance du groupe de lampes et des bouts de conducteurs qui le séparent du moteur.

L'application des lois de Kirchhoff fournit les relations

$$I = i + i',$$

$$E = IR + i'r' \quad \text{et} \quad E - e = IR + ir.$$

On tire de là

$$I = \frac{E - e - IR}{r} + \frac{E - IR}{r'} \quad \text{ou} \quad I = \frac{E(r + r') - er'}{rr' + Rr + Rr'},$$

$$i' = \frac{E - IR}{r'},$$

$$i = I - i'.$$

Comme la résistance totale des fils de ligne vaut

$$1,8 \cdot 10^{-6} \frac{2 \cdot 3000}{3,14 \cdot \frac{0,5^2}{4}} = 0,055 \text{ ohm},$$

il vient :

$$R = 0,05 + \frac{1}{2} \cdot 0,055 = 0,0775 \text{ ohm},$$

$$r' = 2 + \frac{1}{2} \cdot 0,055 = 2,0275 \text{ ohms},$$

$$I = \frac{110\,(0,5 + 2,0275) - 100 \cdot 2,0275}{0,5 \cdot 2,0275 + 0,0775 \cdot 0,5 + 0,0775 \cdot 2,0275} = 61,9 \text{ ampères}.$$

$$i' = \frac{110 - 61,9 \cdot 0,0775}{2,0275} = 51,8 \text{ ampères},$$

$$i = 61,9 - 51,8 = 10,1 \text{ ampères}.$$

On a, d'autre part,

$$V = E - I\rho = 110 - 61,9 \cdot 0,05 = 106,9 \text{ volts},$$

$$v = V - I\,\frac{0,055}{2} = 105,2 \text{ volts},$$

$$v' = v - i'\,\frac{0,055}{2} = 103,8 \text{ volts}.$$

Enfin, en ce qui concerne les puissances, on trouve : pour le générateur,

$$EI \text{ watts ou } \frac{110 \cdot 61,9}{736} = 9,26 \text{ chevaux},$$

pour le moteur,

$$vi \text{ watts ou } \frac{105,2 \cdot 10,1}{736} = 1,443 \text{ cheval};$$

pour les lampes,

$$v'i' \text{ watts ou } \frac{103,8 \cdot 51,8}{736} = 7,31 \text{ chevaux},$$

pour la ligne,

$$\frac{0,055}{2}\left(I^2 + i'^2\right) \text{ watts ou } \frac{0,055}{2 \cdot 736}\left(61,9^2 + 51,8^2\right) = 0,243 \text{ cheval}.$$

41. — *Deux générateurs, dont les résistances intérieures ρ mesurent 0,05 ohm et qui développent des forces électromotrices E et E' égales à 115 et 112 volts, alimentent par les extrémités opposées*

deux conducteurs en cuivre d'une résistivité de 1,8 microhm-centimètre, de 300 mètres de longueur et de 8 millimètres de diamètre, entre lesquels sont dérivés, aux tiers de leur développement, deux récepteurs absorbant 100 et 150 ampères, fig. 24. Calculer l'intensité du courant débité par chacune des machines et la puissance électrique, en chevaux, absorbée par chacune des dérivations.

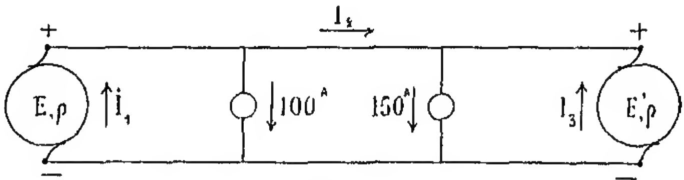

Fig 24

Supposons que, dans les diverses parties du circuit, les courants circulent dans le sens des flèches figurées.

On a, d'après la première loi de Kirchhoff,

$$I_1 = I_2 + 100, \qquad (1)$$

$$I_2 + I_3 = 150. \qquad (2)$$

En désignant par $\rho + R_1$, R_2 et $\rho + R_3$ les résistances parcourues respectivement par les courants I_1, I_2 et I_3, l'application de la seconde loi de Kirchhoff donne, en outre, la relation

$$I_1(\rho + R_1) + I_2 R_2 - I_3(\rho + R_3) = E - E'.$$

qui, avec

$$E = 115 \text{ volts}, \quad E' = 112 \text{ volts}, \quad \rho = 0{,}05 \text{ ohm},$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = \frac{1}{3}\left(1{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{2 \cdot 30000}{3{,}14 \cdot \frac{0{,}8^2}{4}}\right) = 0{,}072 \text{ ohm},$$

devient

$$0{,}122\, I_1 + 0{,}072\, I_2 - 0{,}122\, I_3 = 3. \qquad (3)$$

Des équations (1), (2) et (3), on tire

$$0{,}122\,(100 + I_2) + 0{,}072\, I_2 - 0{,}122\,(150 - I_2) = 3$$

ou

$$I_2 = 28,8 \text{ ampères}$$

et, par suite,

$$I_1 = 28,8 + 100 = 128,8 \text{ ampères},$$

$$I_3 = 150 - 28,8 = 121,2 \text{ ampères}.$$

La différence de potentiel aux extrémités de la dérivation de 100 ampères étant

$$E - I_1(\rho + R_1) = 115 - 128,8 \,.\, 0,122 = 99,3 \text{ volts},$$

la puissance absorbée par cette dérivation atteint

$$\frac{99,3 \,.\, 100}{736} = 13,5 \text{ chevaux}.$$

Pour la dérivation de 150 ampères, on trouve de même

$$E' - I_3(\rho + R_3) = 112 - 121,2 \,.\, 0,122 = 97,2 \text{ volts}$$

et

$$\frac{97,2 \,.\, 150}{736} = 19,8 \text{ chevaux}.$$

42. — *Les pôles semblables de deux générateurs électriques, de résistance intérieure négligeable et développant des forces électromotrices égales respectivement à 200 et à 196 volts, sont reliés par deux conducteurs présentant chacun une longueur de 500 mètres et une résistance de 800 microhms par mètre courant. Les courants débités par les machines constituent entre les conducteurs une dérivation continue d'une intensité de 0,2 ampère par mètre courant. En quel endroit se rejoignent les courants amenés par les extrémités opposées du conducteur positif ?*

Désignons par e et e' les forces électromotrices des générateurs, par l la longueur des conducteurs, par r et j les valeurs linéaires de la résistance de ceux-ci et de l'intensité des courants qui passent de l'un à l'autre.

Soit y, fig. 25, la distance, comptée suivant les conducteurs, à laquelle se trouve du générateur e le lieu de rencontre des

courants engendrés par les deux machines et soit u la différence de potentiel existant en cet endroit entre les conducteurs.

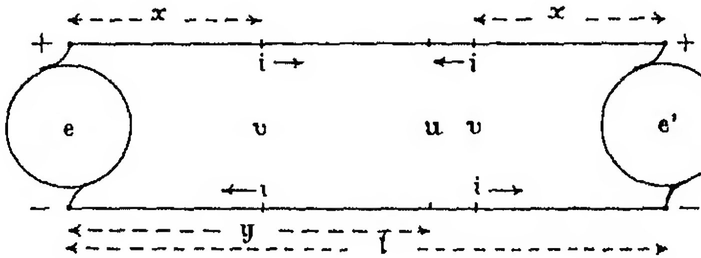

Fig. 25.

Les intensités totales des courants débités par les générateurs e et e' sont respectivement jy et $j(l-y)$.

Si i est l'intensité dans les conducteurs du courant dû à l'une des machines à la distance x de celle-ci et v la différence de potentiel des conducteurs en ce point, on a

$$-di = j\,dx$$

et

$$-dv = 2\,ri\,dx.$$

En appliquant ces relations à la machine e, il vient

$$-\int_{jy}^{i} di = jy - i = j\int_0^x dx = jx$$

ou

$$i = j(y - x)$$

et

$$-\int_e^u dv = e - u = 2r\int_0^y i\,dx = 2rj\int_0^y (y - x)\,dx$$

$$= 2rj\left(y^2 - \frac{y^2}{2}\right)$$

ou

$$e - u = rjy^2. \qquad (1)$$

En les appliquant au générateur e', on trouve

$$-\int_{j(l-y)}^{i} di = j(l-y) - i = j\int_0^x dx = jx$$

ou

$$i = j(l - y - x)$$

et

$$-\int_{e'}^{u} dv = e' - u = 2r\int_0^{l-y} i\,dx = 2rj\int_0^{l-y}(l - y - x)\,dx$$

$$= 2rj\left\{(l-y)^2 - \frac{(l-y)^2}{2}\right\}$$

ou

$$e' - u = rj(l-y)^2. \qquad (2)$$

Des équations (1) et (2) l'on tire, par soustraction membre à membre,

$$e - e' = rj\left\{y^2 - (l-y)^2\right\} = rjl(2y - l)$$

c'est-à-dire

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{e - e'}{rjl} + l\right).$$

Avec $e = 200$ volts, $e' = 196$ volts, $r = 0{,}0008$ ohm par mètre, $j = 0{,}2$ ampère par mètre et $l = 500$ mètres, on obtient

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{200 - 196}{0{,}0008 \cdot 0{,}2 \cdot 500} + 500\right) = 275 \text{ mètres}.$$

43. — *Deux générateurs électriques, dont la résistance intérieure ρ est égale à 0,01 ohm, sont disposés chacun en série avec une résistance $r = 0{,}005$ ohm et concourent en dérivation à alimenter une résistance R de 0,5 ohm, fig. 20. Par raison de symétrie, quand ils développent des forces électromotrices égales, les deux générateurs débitent le même courant et le conducteur joignant les points où ils se raccordent aux résistances r n'est le siège d'aucun courant. Les courants ont alors dans les autres parties du système les sens indiqués par les flèches. Quelle résistance faudrait-il donner au conducteur susdit pour que le courant ne change de sens dans une des résistances r que lorsque la force électromotrice du générateur correspondant a décrû de plus de 20 pour 100?*

Désignons par les notations et les flèches du schéma les intensités et les sens positifs des divers courants, lorsque la force électromotrice E'' d'un des générateurs est inférieure à la force électromotrice E' de l'autre.

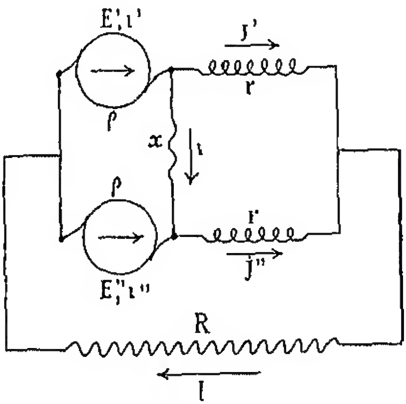

Fig. 26

Les lois de Kirchhoff donnent les relations

$$i' = i + j', \quad (1) \qquad E' = i'\rho + j'r + IR, \quad (4)$$
$$i'' + i = j'', \quad (2) \qquad E'' = i''\rho + j''r + IR, \quad (5)$$
$$j' + j'' = I, \quad (3) \qquad j'r - j''r - ix = 0, \quad (6)$$

qui permettent de calculer le courant i'' en fonction des forces électromotrices et des résistances du circuit.

De (4), (1) et (3) on déduit

$$E' = i\rho + j'\rho + j'r + j'R + j''R$$

et, en remplaçant i par sa valeur tirée de (6),

$$E' = \left(j'\frac{r}{x} - j''\frac{r}{x}\right)\rho + j'\rho + j'r + j'R + j''R$$

ou

$$E' = j'\left(\rho\frac{r}{x} + \rho + r + R\right) + j''\left(R - \rho\frac{r}{x}\right). \quad (7)$$

De même, en combinant (5), (2), (3) et (6), il vient

$$E'' = j''\left(\rho\frac{r}{x} + \rho + r + R\right) + j'\left(R - \rho\frac{r}{x}\right). \quad (8)$$

L'élimination de j' entre (7) et (8) conduit à

$$j'' = \frac{E''\left(\rho\frac{r}{x} + \rho + r + R\right) - E'\left(R - \rho\frac{r}{x}\right)}{\left(\rho\frac{r}{x} + \rho + r + R\right)^2 - \left(R - \rho\frac{r}{x}\right)^2}.$$

Le dénominateur de cette expression est toujours positif. Pour que le courant j'' ait le sens figuré, il faut donc que

$$E''\left(\rho\frac{r}{x} + \rho + r + R\right) > E'\left(R - \rho\frac{r}{x}\right)$$

ou que

$$x < \rho r \frac{E' + E''}{E'R - E''(\rho + r + R)}.$$

En posant $E'' = E'(1 - 0{,}2) = 0{,}8\,E'$ et en remplaçant les autres symboles par leurs valeurs numériques, on obtient la condition

$$x < 0{,}01 \,.\, 0{,}005 \frac{1 + 0{,}8}{1 \,.\, 0{,}5 - 0{,}8\,(0{,}01 + 0{,}005 + 0{,}5)}$$

c'est-à-dire

$$x < 0{,}001\,02 \text{ ohm}.$$

44. — *Deux dynamos A et B, fig. 27, dont les résistances sont égales à 0,1 ohm, sont disposées en circuit avec une génératrice C de résistance négligeable, de manière que leurs forces électromotrices soient en opposition par rapport à celle de cette dernière, qui mesure 200 volts. Sur la machine A est dérivé un rhéostat de 1 ohm. Quelles valeurs ont les forces électromotrices des machines A et B lorsque la différence de potentiel aux bornes du rhéostat vaut la moitié de la force électromotrice de la machine C et que la machine B utilise une puissance électrique égale à celle développée par la machine A ?*

Adoptons, pour représenter les forces électromotrices, les résistances et les intensités de courant, les notations inscrites sur le schéma du circuit, qui indique les sens que doivent avoir les forces électromotrices et les courants pour que les machines C et A fournissent de l'énergie électrique et que la machine B en utilise.

L'application des lois de Kirchhoff donne les relations

$$I = i + j, \qquad (1)$$
$$E - \varepsilon = jr + IR, \qquad (2)$$
$$e = ir + IR. \qquad (3)$$

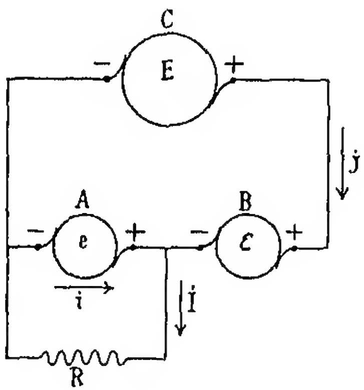

Fig 27.

En y joignant les conditions imposées

$$IR = \frac{1}{2} E, \qquad (4)$$
$$\varepsilon j = ei, \qquad (5)$$

on a cinq équations, dont on peut tirer ε et e, après élimination de i, j et I.

A cet effet, additionnons (2) et (3) membre à membre; remplaçons ensuite, d'après (1), $i + j$ par I et substituons à I sa valeur donnée par (4). Il vient

$$e - \varepsilon = E \frac{r}{2R}. \qquad (6)$$

D'autre part, divisons (2) et (3) membre à membre, après avoir isolé j et i dans les premiers membres de ces équations et remplacé IR par E/2. On obtient

$$\frac{j}{i} = \frac{E - 2\varepsilon}{2e - E},$$

ou, en remarquant que, d'après (5), $I/i = e/\varepsilon$,

$$e\,(2e - E) = \varepsilon\,(E - 2\varepsilon). \qquad (7)$$

Si l'on introduit dans (7) la valeur de e déduite de (6), on arrive à l'équation du second degré

$$4\varepsilon^2 + 2E\left(\frac{r}{R} - 1\right)\varepsilon + E^2\frac{r}{2R}\left(\frac{r}{R} - 1\right) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\varepsilon = \frac{E}{4}\left(1 - \frac{r}{R} + \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}\right),$$

et, par substitution de cette racine positive dans (6),

$$e = \frac{E}{4}\left(1 + \frac{r}{R} + \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}\right).$$

Avec

$$E = 200 \text{ volts},$$
$$r = 0{,}1 \text{ ohm},$$
$$R = 1 \text{ ohm},$$

on trouve

$$\varepsilon = \frac{200}{4}\left(1 - \frac{0{,}1}{1} + \sqrt{1 - \frac{0{,}01}{1}}\right) = 94{,}75 \text{ volts}$$

et

$$e = \frac{200}{4}\left(1 + \frac{0{,}1}{1} + \sqrt{1 - \frac{0{,}01}{1}}\right) = 104{,}75 \text{ volts}.$$

45. — *Deux groupes d'appareils récepteurs, exigeant respectivement $i_1 = 75$ et $i_2 = 125$ ampères sous une différence de potentiel v de 110 volts, fig. 28, doivent être alimentés par un même générateur, dont la résistance intérieure est négligeable et qui développe une force électromotrice E de 120 volts. Si la ligne de raccordement est constituée par deux conducteurs principaux qui, à la distance l de 200 mètres du générateur, se bifurquent en deux dérivations, dont la première a une longueur l_1 de 60 mètres et la seconde une longueur l_2 de 40 mètres, quelles sont les sections de*

cuivre s, s_1 et s_2 à donner à ses trois tronçons pour réduire autant que possible le volume total U de métal nécessaire?

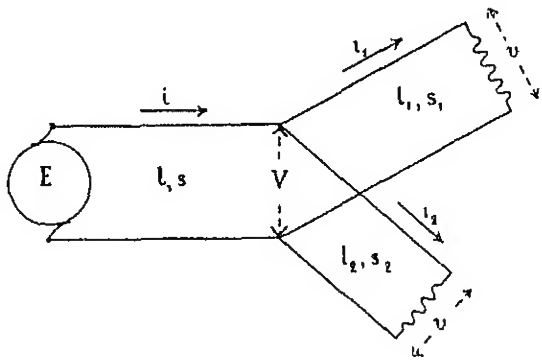

Fig. 28

Il s'agit de rendre minima la fonction

$$U = 2ls + 2l_1s_1 + 2l_2s_2.$$

Les sections s, s_1 et s_2 dépendent de la différence de potentiel V admise entre les points de bifurcation de la ligne. En effet, des relations

$$i = i_1 + i_2 = \frac{E - V}{\rho\frac{2l}{s}}, \quad i_1 = \frac{V - v}{\rho\frac{2l_1}{s_1}}, \quad i_2 = \frac{V - v}{\rho\frac{2l_2}{s_2}},$$

où ρ désigne la résistivité du cuivre, on déduit

$$s = \frac{2\rho il}{E - V}, \quad s_1 = \frac{2\rho i_1l_1}{V - v}, \quad s_2 = \frac{2\rho i_2l_2}{V - v}.$$

On a, par suite,

$$U = \frac{4\rho il^2}{E - V} + \frac{4\rho i_1l_1^2}{V - v} + \frac{4\rho i_2l_2^2}{V - v}$$

et la valeur de V qui rend le volume U minimum est donnée par la condition

$$\frac{dU}{dV} = 4\rho\left\{il^2\frac{1}{(E - V)^2} - i_1l_1^2\frac{1}{(V - v)^2} - i_2l_2^2\frac{1}{(V - v)^2}\right\} = 0,$$

soit

$$\frac{1}{(E - V)^2} il^2 = \frac{1}{(V - v)^2} (i_1 l_1^2 + i_2 l_2^2);$$

d'où l'on tire

$$\frac{E - V}{V - v} = \sqrt{\frac{il^2}{i_1 l_1^2 + i_2 l_2^2}} = \sqrt{A}$$

ou

$$\frac{E - V}{E - v} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A} + 1}$$

et

$$\frac{V - v}{E - V} = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

ou

$$\frac{V - v}{E - v} = \frac{1}{1 + \sqrt{A}}.$$

Les sections les plus économiques sont donc

$$s = 2\rho (i_1 + i_2) l \frac{\sqrt{A} + 1}{\sqrt{A}(E - v)},$$

$$s_1 = 2\rho i_1 l_1 \frac{1 + \sqrt{A}}{E - v},$$

$$s_2 = 2\rho i_2 l_2 \frac{1 + \sqrt{A}}{E - v},$$

en posant

$$\sqrt{A} = \sqrt{\frac{(i_1 + i_2) l^2}{i_1 l_1^2 + i_2 l_2^2}}.$$

Avec

$i_1 = 75$ ampères,

$i_2 = 125$ ampères,

$l = 20000$ cm,

$l_1 = 6000$ cm,

$l_2 = 4000$ cm,

$E = 120$ volts,

$v = 110$ volts,

il vient

$$\sqrt{\bar{A}} = \sqrt{\frac{(75 + 125)\,20\,000^2}{75 \cdot 6000^2 + 125 \cdot 4000^2}} = 4,12$$

et, en adoptant $\rho = 1,8 \cdot 10^{-6}$ ohm-cm,

$$s = 2 \cdot 1,8 \cdot 10^{-6} \cdot (75 + 125) \cdot 20\,000 \, \frac{4,12 + 1}{4,12\,(120 - 110)} = 1,79 \text{ cm}^2,$$

$$s_1 = 2 \cdot 1,8 \cdot 10^{-6} \cdot 75 \cdot 6000 \, \frac{1 + 4,12}{120 - 110} = 0,83 \text{ cm}^2,$$

$$s_2 = 2 \cdot 1,8 \cdot 10^{-6} \cdot 125 \cdot 4000 \, \frac{1 + 4,12}{120 - 110} = 0,923 \text{ cm}^2.$$

46. — *Une dynamo à excitation indépendante, dont la force électromotrice E varie avec le courant débité I suivant la loi empirique $E = E_0 - aI$, où $E_0 = 500$ volts et $a = 0,5$ volt par ampère, et dont l'induit a une résistance ρ de 0,1 ohm, dessert une distribution dont la demande de courant i change continuellement entre $i_{min} = 0$ et $i_{max} = 200$ ampères. Aux bornes de la machine est dérivée une batterie d'accumulateurs tampon, dont chaque élément développe une force électromotrice e de 2 volts et présente, y compris les connexions, une résistance r de 0,0015 ohm. Combien d'éléments doit comporter la batterie pour ne recevoir ni fournir de courant quand la distribution alimentée consomme un courant $i_{moy} = 70$ ampères et quelles sont, avec ce nombre d'accumulateurs, les intensités maxima des courants de charge et de décharge que ceux-ci ont à supporter ?*

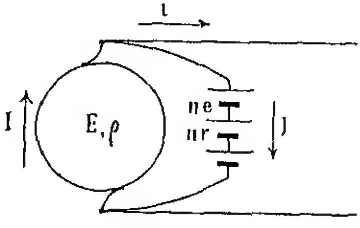

Fig. 29.

Désignons par j l'intensité du courant dans la batterie et considérons ce courant comme positif quand il charge les accumulateurs. Soit n le nombre d'éléments cherché.

L'application de la seconde loi de Kirchhoff au circuit comprenant la machine et la batterie, fig. 29, donne la relation

$$E - ne = I\rho + jnr$$

ou

$$E_0 - aI - ne = I\rho + jnr.$$

En remplaçant I par sa valeur $i + j$, déduite de la première loi de Kirchhoff, il vient

$$E_0 - a(i + j) - ne = (i + j)\rho + jnr$$

ou

$$j = \frac{E_0 - ne - (a + \rho)\, i}{\rho + nr + a}.$$

Lorsque $i = i_{moy}$, on doit avoir $j = 0$. L'équation précédente devient, dans ces conditions,

$$E_0 - ne - (a + \rho)\, i_{moy} = 0$$

et l'on voit que le nombre d'accumulateurs requis est

$$n = \frac{E_0 - (a + \rho)\, i_{moy}}{e}.$$

La même équation montre qu'avec ce nombre d'éléments j est positif, c'est-à-dire la batterie se charge, quand $i < i_{moy}$ et que le courant de charge maximum, correspondant à $i = 0$, a pour valeur

$$j' = \frac{E_0 - ne}{\rho + nr + a} = \frac{(a + \rho)\, i_{moy}}{\rho + nr + a}.$$

j est négatif au contraire, c'est-à-dire la batterie se décharge, quand $i > i_{moy}$ et le courant de décharge maximum, correspondant à $i = i_{max}$, est

$$j'' = \frac{E_0 - ne - (a + \rho)\, i_{max}}{\rho + nr + a} = -\frac{(a + \rho)(i_{max} - i_{moy})}{\rho + nr + a}.$$

Avec

$E_0 = 500$ volts,

$a = 0,5$ volt par ampère,

$e = 2$ volts,

$$\rho = 0{,}1 \text{ ohm},$$
$$r = 0{,}001\,5 \text{ ohm},$$
$$i_{moy} = 70 \text{ ampères},$$
$$i_{max} = 200 \text{ ampères},$$

on trouve

$$n = \frac{500 - (0{,}5 + 0{,}1)\,70}{2} = 229 \text{ éléments},$$

$$i' = \frac{(0{,}5 + 0{,}1)\,70}{0{,}1 + 229 \cdot 0{,}001\,5 + 0{,}5} = 44{,}5 \text{ ampères},$$

$$i'' = -\frac{(0{,}5 + 0{,}1)\,(200 - 70)}{0{,}1 + 229 \cdot 0{,}001\,5 + 0{,}5} = -82{,}6 \text{ ampères}.$$

47. — *La force électromotrice E d'une dynamo à excitation indépendante, dont l'induit a une résistance ρ de 0,05 ohm et qui est conduite par un moteur irrégulier, varie périodiquement de 2 pour 100 autour de sa valeur moyenne égale à 105 volts. Déterminer la résistance r que doit présenter la batterie de 50 accumulateurs en série dérivée sur les bornes de la dynamo en vue de réduire à 0,5 pour 100 les variations de l'intensité I du courant fourni au circuit d'utilisation constitué par des lampes à incandescence. On admettra que la batterie développe une force électromotrice constante de 2 volts par élément. Quelles seraient, dans ces conditions, les valeurs maxima des courants de charge et de décharge de la batterie, la résistance R du circuit d'utilisation valant 1 ohm ?*

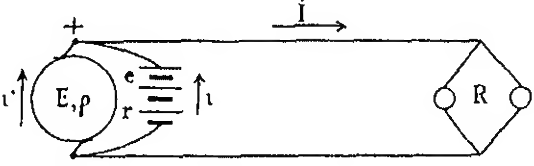

Fig 30

Soient i' le courant dans l'induit de la dynamo et e la force électromotrice totale de la batterie. Considérons le courant i de la batterie comme positif quand celle-ci se décharge.

L'application des lois de Kirchhoff au circuit représenté par la fig. 30 donne les relations

$$I = i' + i,$$
$$E = i'\rho + IR,$$
$$e = ir + IR.$$

On tire de là

$$I = \frac{E - IR}{\rho} + \frac{e - IR}{r}$$

ou

$$I = \frac{Er + e\rho}{\rho r + Rr + R\rho}.$$

Un changement dE de E entraîne une variation absolue de I

$$dI = \frac{r\,dE}{\rho r + Rr + R\rho}$$

et une variation relative

$$\frac{dI}{I} = \frac{r\,dE}{Er + e\rho}.$$

En résolvant la dernière équation par rapport à r, on obtient

$$r = \frac{\frac{dI}{I}\,e\rho}{dE - \frac{dI}{I}\,E} = \frac{\frac{dI}{I}\cdot\frac{e}{E}\,\rho}{\frac{dE}{E} - \frac{dI}{I}}.$$

Pour que dI/I se réduise à 0,005 quand $dE/E = 0{,}02$, il faut donc que la résistance de la batterie mesure

$$r = \frac{0{,}005\cdot\frac{50\,.\,2}{105}\cdot 0{,}05}{0{,}02 - 0{,}005} = 0{,}0159 \text{ ohm}.$$

Pour trouver l'expression de i, remplaçons I par sa valeur $(Er + e\rho)/(\rho r + Rr + R\rho)$ dans l'égalité $e = ir + IR$. Il vient

$$i = \frac{e(R + \rho) - ER}{\rho r + Rr + R\rho}.$$

Le courant i est positif et la batterie se décharge quand $e(R + \rho) > ER$. Le courant de décharge maximum correspond à la valeur minima de E, soit 105 (1 — 0,02) = 102,9 volts, et atteint

$$\frac{50 \cdot 2(1 + 0{,}05) - 102{,}9 \cdot 1}{0{,}05 \cdot 0{,}0159 + 1 \cdot 0{,}0159 + 1 \cdot 0{,}05} = 31{,}5 \text{ ampères.}$$

Le courant de la batterie est négatif et celle-ci se charge quand $ER > e(R + \rho)$. Le courant de charge est maximum pour la valeur maxima de E, soit 105 (1 + 0,02) = 107,1 volts, et vaut

$$\frac{107{,}1 \cdot 1 - 50 \cdot 2(1 + 0{,}05)}{0{,}05 \cdot 0{,}0159 + 1 \cdot 0{,}0159 + 1 \cdot 0{,}05} = 31{,}5 \text{ ampères.}$$

En réalité, les variations que subit la force électromotrice des accumulateurs, qui croît pendant la charge et décroît pendant la décharge, ont pour effet de diminuer les intensités maxima des courants alternativement absorbés et débités par la batterie.

Chapitre IV.

ÉLECTROMAGNÉTISME.

48. — *Quelles sont la direction et l'intensité du champ magnétique dû à une nappe de courant électrique plane et indéfinie, où l'électricité circule suivant une direction rectiligne avec une intensité de 3 ampères par mètre de largeur?*

Figurons par la droite indéfinie NN, fig. 31, l'intersection de la nappe et d'un plan normal à la direction du courant, que nous supposerons s'éloigner du lecteur. Soit A un point du plan sécant.

Considérons, à la distance x du pied de la perpendiculaire AO abaissée sur la trace NN, un élément de la nappe, constitué par un courant linéaire droit, de longueur infinie et d'intensité $i\,dx$, si i désigne l'intensité correspondant à l'unité de largeur de la nappe. r et α ayant les significations indiquées dans la figure, ce courant élémentaire exerce, au point A, sur l'unité de pôle magnétique, suivant la loi de Biot et Savart, une force

$$df = \frac{2\,i\,dx}{r},$$

faisant l'angle α avec la droite AH parallèle à NN.

De ce que le courant élémentaire de même intensité, situé à la même distance de l'autre côté du point O, produit une action dont la composante normale à AH est égale et directe-

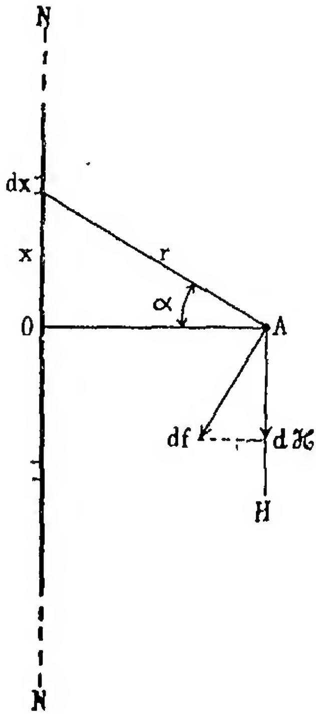

Fig. 31

ment opposée à celle de la force considérée, il résulte que le champ magnétique cherché est parallèle à NN et peut s'obtenir en sommant les composantes suivant AH des forces telles que df.

$\mathcal{H}$ étant l'intensité du champ, on a donc

$$d\mathcal{H} = df \,.\cos\alpha = \frac{2\,i\,dx}{r}\cos\alpha = 2\,i\,d\alpha\,,$$

puisque

$$dx\cos\alpha = r\,d\alpha\,,$$

et, par suite,

$$\mathcal{H} = 2i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\alpha = 2\pi i,$$

valeur indépendante de la position du point A.

On voit que le champ magnétique créé par la nappe de courant est uniforme, parallèle au plan de la nappe et normal à la direction du courant; il a des sens contraires de part et d'autre de la nappe.

Lorsque $i = 3 \cdot 10^{-1}/10^{2}$ unités C. G. S. électromagnétiques d'intensité de courant par cm de largeur,

$$\mathcal{H} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 0{,}0188 \text{ gauss.}$$

49. — *Quelle est l'intensité du champ magnétique à la distance de 3 décimètres de l'axe d'un tube cylindrique de longueur indéfinie, dont la paroi, de faible épaisseur, transmet longitudinalement un courant électrique de 300 ampères, uniformément réparti?*

Deux cas sont à distinguer : la distance indiquée aboutit à un point situé à l'intérieur ou à un point situé à l'extérieur du tube.

Considérons d'abord, fig. 32, l'hypothèse d'une distance OP plus petite que le rayon R de la circonférence figurant la sec-

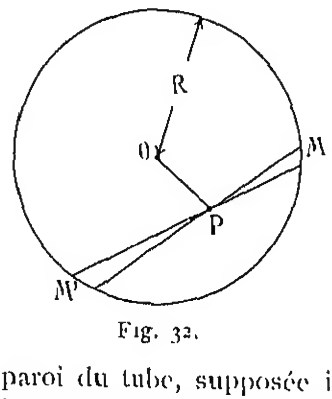

Fig. 32.

tion droite de la paroi du tube, supposée infiniment mince.

Désignons par I l'intensité du courant qui traverse cette section sous une densité uniforme.

Soient dl et dl' des éléments de circonférence compris, en M et M', entre deux droites se coupant au point P sous un angle infiniment petit. Les courants rectilignes indéfinis d'intensités

$$I\frac{dl}{2\pi R} \quad \text{et} \quad I\frac{dl'}{2\pi R},$$

correspondant à ces éléments, exercent, en P, sur l'unité de pôle magnétique, des forces

$$2I\frac{dl}{2\pi R}\cdot\frac{1}{MP} = \frac{I\,dl}{\pi R.MP} \quad \text{et} \quad \frac{I\,dl'}{\pi R.M'P}.$$

De même grandeur, puisque les éléments dl et dl', également inclinés sur la corde MM', ont des longueurs proportionnelles à leurs distances au point P, normales à MM' dans le plan de la figure et de sens opposés, ces deux forces se font équilibre.

Toute la circonférence pouvant être décomposée en couples d'éléments tels que dl et dl', le champ magnétique est nul à l'intérieur du courant tubulaire.

Supposons maintenant OP plus grand que R, fig. 33.

La force $I\,dl/\pi R.MP$, due au courant indéfini correspondant à un élément dl de circonférence, est perpendiculaire à la droite MP qui joint celui-ci à l'unité de pôle magnétique et fait, par suite, avec la direction PH normale à OP, un angle α

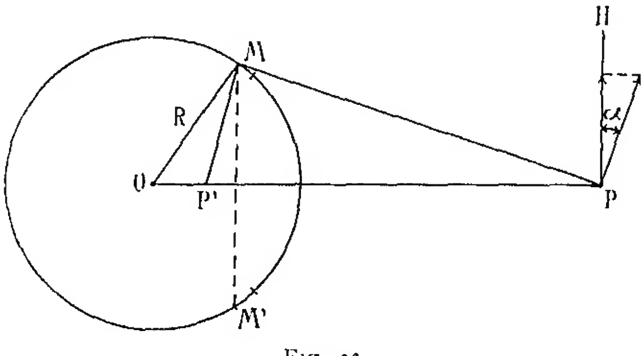

Fig. 33.

égal à l'angle MPO. Comme à l'élément symétrique du précédent par rapport à OP correspond une force de même

grandeur, faisant avec PH le même angle, mais de l'autre côté, l'action résultante du courant total est dirigée suivant PH et son intensité est exprimée par l'intégrale

$$\mathcal{H} = \frac{I}{\pi R}\int_0^{2\pi R}\frac{dl}{MP}\cos\alpha.$$

Pour faciliter l'intégration, considérons le point P' tel que $OP.OP' = R^2$. Des deux triangles MOP et P'OM, semblables parce qu'ils ont un angle commun compris entre côtés proportionnels, on tire la relation

$$\frac{MP}{P'M} = \frac{OP}{R},$$

qui permet d'écrire l'expression de $\mathcal{H}$ sous la forme

$$\mathcal{H} = \frac{I}{\pi . OP}\int_0^{2\pi R}\frac{dl}{P'M}\cos\alpha$$

Mais l'angle P'MO est égal à l'angle MPO. $dl \cos\alpha : P'M$ est donc l'angle plan $d\theta$ sous lequel l'élément dl est vu du point P'. Il s'ensuit que

$$\mathcal{H} = \frac{I}{\pi\ OP}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2I}{OP}.$$

D'où la conclusion qu'en tous les points extérieurs l'intensité du champ magnétique est la même que si le courant tubulaire était condensé suivant son axe.

Pour un courant $I = 300.10^{-1}$ unités C. G. S. électromagnétiques et une distance $OP = 30$ cm, on a donc

$$\mathcal{H} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathcal{H} = \frac{2.300.10^{-1}}{30} = 2 \text{ gauss},$$

suivant que cette distance aboutit à l'intérieur ou à l'extérieur du conducteur tubulaire considéré.

50. — *Quelle est, en ampères, l'intensité approximative i du courant circulant dans un conducteur vertical très long, si, pour faire marquer 45 degrés à l'aiguille d'une petite boussole de déclinaison approchée du conducteur suivant le plan du méridien magnétique qui contient celui-ci, il faut arrêter l'appareil à 1 mètre du courant ?*

L'aiguille se tient en équilibre, dans sa position à 45° avec le méridien, sous les actions antagonistes du champ magnétique créé par le courant et de la composante horizontale $\mathcal{H}$ du champ terrestre.

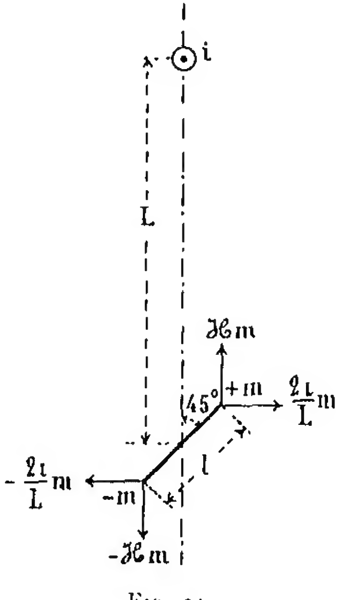

Fig. 34

Soient L la distance du courant au centre de l'aiguille, l et m la longueur et la masse polaire de celle-ci, fig. 34.

On peut admettre que l'aiguille, vu sa petitesse, est soumise à un couple déviant

$$\frac{2i}{L} m \,.\, l \cos 45^{\circ}$$

Le couple directeur terrestre est, d'autre part, égal à

$$\mathcal{H}\, m \,.\, l \sin 45^{\circ}.$$

De l'égalité

$$\frac{2\,i}{L}\, m\, l \cos 45^{\circ} = \mathcal{H}\, m\, l \sin 45^{\circ},$$

on tire

$$i = \frac{\mathcal{H}\, L}{2}\, \mathrm{tg}\, 45^{\circ}.$$

$\mathcal{H}$ étant approximativement égal à 0,2 unité C. G. S., on trouve, si L est exprimé en cm,

$$i = \frac{0{,}2\,.\,L}{2}\,.\,1 = 0{,}1\ L \text{ unités C. G. S. électromagnétiques,}$$
soit L ampères.

L'intensité du courant en ampères est donc représentée par le même nombre que la distance en cm de la boussole au courant.

Dans le cas actuel, on a $i = 100$ ampères.

51. — *Une aiguille aimantée est librement suspendue par son centre de gravité maintenu en un point de l'axe vertical d'un conducteur indéfini, constitué par une tôle mince courbée en forme de demi-cylindre dont le rayon mesure 2 décimètres, dont les bords sont dans le plan du méridien magnétique et dont la convexité est tournée vers l'Est. Quand on fait passer de bas en haut dans le conducteur un courant de 31,4 ampères, l'aiguille se tient verticalement. Quelle est la valeur de la composante horizontale du champ terrestre à l'endroit où se fait l'expérience ?*

Cherchons la direction et l'intensité du champ magnétique dû au courant sur l'axe du conducteur semi-cylindrique représenté en coupe dans la fig. 35.

Soient i l'intensité du courant et r le rayon du cylindre.

Considérons dans la tôle, suivant la génératrice définie par l'angle α indiqué, un élément de largeur circonférentielle $r\,d\alpha$ parcouru par une fraction du courant total égale à $i\,.\,r\,d\alpha/\pi\, r$ ou $i\,d\alpha/\pi$.

Seul, cet élément créerait sur l'axe du cylindre un champ d'intensité

$$\frac{2\,i\,d\alpha}{\pi\,r},$$

normal au plan contenant l'élément et l'axe.

Comme l'élément symétrique du précédent par rapport au plan axial perpendiculaire au plan qui passe par les bords du demi-cylindre donne lieu à une action de même valeur et présentant sur ce dernier plan la même inclinaison mais de

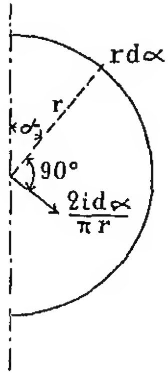

Fig. 35

l'autre côté, on voit que le champ résultant de l'ensemble de tous les éléments constituant le conducteur est normal à l'axe dans le plan joignant les bords du demi-cylindre et que son intensité est donnée par l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{2\,i\,d\alpha}{\pi\,r}\sin\alpha = \frac{2\,i}{\pi\,r}\Big|-\cos\alpha\Big|_0^\pi = \frac{4\,i}{\pi\,r}.$$

Lorsque le conducteur est disposé verticalement de manière que le plan de ses bords soit dans le méridien magnétique et que la convexité du demi-cylindre soit tournée vers l'Est, les lignes de force du champ dû à un courant traversant la tôle de bas en haut sont, en tous les points de l'axe, horizontales et orientées vers le Sud. Si une aiguille aimantée, libre de se mouvoir autour de son centre de gravité en coïncidence

avec un point de cet axe, se tient alors verticalement, position dans laquelle le couple des forces que la composante verticale du magnétisme terrestre exerce sur ses pôles est nul, la composante horizontale $\mathcal{H}$ du champ terrestre doit être égale à l'intensité du champ produit par le courant :

$$\mathcal{H} = \frac{4\,i}{\pi\,r}.$$

Par suite, avec $i = 31,4 \cdot 10^{-1}$ unités C. G. S. électromagnétiques et $r = 20$ cm, on a

$$\mathcal{H} = \frac{4 \cdot 31,4 \cdot 10^{-1}}{3,14 \cdot 20} = 0,2 \text{ gauss}.$$

52. — *Un solénoïde comportant $n' = 300$ spires de fil d'une surface s' de 150 millimètres carrés et parcouru par un courant i' de 0,1 ampère est disposé à l'intérieur d'une bobine cylindrique de grande longueur, de manière que son axe fasse un angle de 45 degrés avec celui de la bobine, laquelle présente, par mètre de longueur, $n_1 = 400$ spires d'un conducteur traversé par un courant i de 10 ampères. Évaluer, en unités C. G. S., le moment du couple qui sollicite le solénoïde, en négligeant l'influence du champ magnétique terrestre.*

Le solénoïde, de longueur l', peut être assimilé à un aimant uniforme possédant des masses polaires

$$i' \frac{n'}{l'} s'.$$

Il est situé dans un champ magnétique sensiblement uniforme, dont l'intensité est

$$4\pi n_1 i.$$

Sur chacun de ses pôles s'exerce donc une force

$$4\pi n_1 i \cdot \frac{i' n' s'}{l'}.$$

Les deux forces, parallèles et de sens opposés, forment un couple dont le bras de levier est $l' \sin 45^\circ$ et le moment

$$4\pi n_1 i \frac{i' n' s'}{l'} \cdot l' \sin 45^\circ = 4\pi n_1 n' i\, i' s' \sin 45^\circ.$$

En posant

$$n_1 = \frac{400}{10^2} = 4 \text{ spires par cm},$$

$$n' = 300 \text{ spires}.$$

$$i = 10 \cdot 10^{-1} = 1 \text{ unité C. G. S électromagnétique},$$

$$i' = 0{,}1 \cdot 10^{-1} = 0{,}01 \text{ unité C. G. S. électromagnétique},$$

$$s' = 1{,}5 \text{ cm}^2,$$

on trouve

$$4 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 300 \cdot 1 \cdot 0{,}01 \cdot 1{,}5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 160 \text{ dynes-cm}.$$

53. — *Quels seraient la direction, le sens et la grandeur en grammes de l'action électrodynamique s'exerçant entre un courant circulaire qui crée en son centre un potentiel magnétique de 314 unités C. G. S. et un courant rectiligne indéfini de 1000 ampères passant par le centre du courant circulaire dans le plan de celui-ci ?*

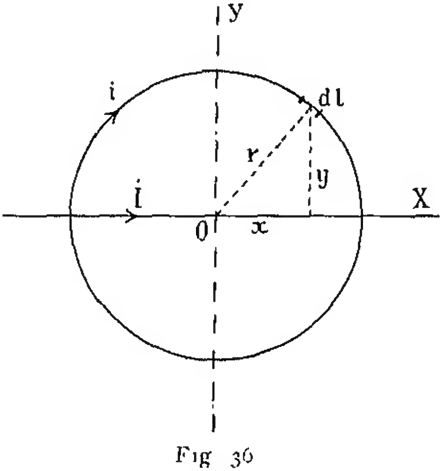

Fig 36

Le potentiel magnétique dû au courant circulaire étant égal à 314 unités C. G. S. au centre, d'où le circuit est vu sous l'angle solide 2π, l'intensité i de ce courant vaut $314/2\pi = 50$ unités C. G. S. électromagnétiques.

Soit $I = 1000 \,.\, 10^{-1} = 100$ unités C. G. S. électromagnétiques l'intensité du courant rectiligne indéfini, qui développe un champ magnétique dont l'intensité à la distance y est $2I/y$ et dont les lignes de force sont des circonférences normales au courant, ayant leurs centres sur celui-ci.

D'après la loi de Laplace, un élément dl du courant circulaire, ayant pour coordonnées x et y par rapport aux deux axes rectangulaires OX et OY de la fig. 36, est sollicité, dans le champ magnétique du courant rectiligne, par une force

$$df = i\frac{2I}{y}\,dl \sin 90^\circ = 2iI\frac{dl}{y},$$

dont la direction passe par le centre O de la spire.

Les forces élémentaires df appliquées à la moitié de la spire que le courant i parcourt dans le sens du courant I convergent vers le centre; celles qui agissent sur l'autre moitié sont divergentes. Si l'on considère les forces df correspondant à deux éléments dl d'une même moitié également distants du courant rectiligne, on voit que leurs composantes parallèles à ce dernier se détruisent mutuellement. L'action résultante du courant rectiligne sur le courant circulaire se réduit donc à une force de translation normale au premier dans le plan du second, orientée vers le bas si les courants ont les sens adoptés dans la figure et égale à la somme de toutes les composantes $df \,.\, y/\sqrt{x^2+y^2}$ perpendiculaires au courant rectiligne. Cette somme est, en désignant par r le rayon du courant circulaire pour tous les points duquel $x^2 + y^2 = r^2$,

$$\int_0^{2\pi r} 2iI\frac{dl}{y}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2iI}{r}\int_0^{2\pi r} dl = 4\pi i I.$$

Avec les données de la question, il vient

$$4\pi i I = 4 \,.\, 3{,}14 \,.\, 50 \,.\, 100 = 62\,800 \text{ dynes}$$

ou

$$\frac{62\,800}{981} = 64 \text{ grammes.}$$

54. — *Un cadre galvanométrique de forme circulaire, comportant $n = 100$ spires d'une surface moyenne $S = 10$ centimètres carrés, peut pivoter autour de son diamètre vertical dans un champ magnétique uniforme horizontal d'intensité $\mathcal{H} = 5$ gauss. Quel est, en milligrammes-centimètres, le moment du couple électromagnétique auquel le cadre est soumis lorsqu'un courant électrique i de 0,01 ampère traverse l'enroulement et que la normale au plan de celui-ci fait un angle α de 45 degrés avec la direction du champ ?*

Pour simplifier la résolution du problème, décomposons le champ $\mathcal{H}$ suivant trois directions orthogonales et déterminons séparément l'influence de chacune des composantes.

Supposons la première composante normale au plan du cadre. La force électromagnétique qui sollicite un élément de courant dans un champ magnétique étant perpendiculaire au plan défini par cet élément et la ligne de force qu'il coupe, et dirigée vers la gauche d'un observateur couché le long de

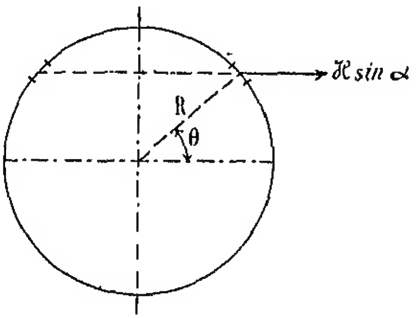

Fig 37

l'élément de manière que le courant entre par ses pieds quand il regarde dans le sens du champ, cette composante soumet le cadre à un système de forces radiales convergentes ou divergentes, en équilibre.

Orientons la deuxième composante dans le plan du cadre normalement à l'axe de rotation. Comme son intensité est $\mathcal{H} \sin \alpha$ et que, d'après la loi de Laplace, elle exerce sur les éléments $Rd\theta$ d'une spire, fig. 37, situés à la même distance

$R\cos\theta$ de part et d'autre de cet axe, des forces de même grandeur

$$df = i\,.\,\mathcal{H}\sin\alpha\,.\,R\,d\theta\,.\cos\theta,$$

perpendiculaires au plan du cadre, de sens opposés et déterminant un couple élémentaire

$$dc = df\,.\,2\,R\cos\theta = 2\,i\,\mathcal{H}\,R^2\sin\alpha\,\cos^2\theta\,d\theta,$$

son action tend à entraîner le cadre autour du diamètre vertical par un couple de moment total

$$C = 2\,n\,i\,\mathcal{H}\,R^2\sin\alpha\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 2\,n\,i\,\mathcal{H}\,R^2\sin\alpha\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \pi\,n\,i\,\mathcal{H}\,R^2\sin\alpha = \mathcal{H}\,S\,n\,i\sin\alpha.$$

La troisième composante, qui devrait être dirigée suivant l'axe de rotation du cadre, étant nulle, l'influence directrice du champ résultant se réduit au couple

$$C = \mathcal{H}\,S\,n\,i\sin\alpha.$$

Quand

$\mathcal{H} = 5$ gauss,

$S = 10\ \text{cm}^2$,

$n = 100$,

$i = 0{,}01\,.\,10^{-1} = 0{,}001$ unité C. G. S. électromagnétique,

$\sin\alpha = \sin 45^\circ = 0{,}707$,

il vient

$$C = 5\,.\,10\,.\,100\,.\,0{,}001\,.\,0{,}707 = 3{,}53\ \text{dynes-cm}$$

ou

$$3{,}53\,.\,10^3/981 = 3{,}6\ \text{milligrammes-cm}.$$

55. — *Dans un champ magnétique uniforme, dont l'intensité $\mathcal{H}$ vaut 100 gauss, tourne, autour d'un diamètre perpendiculaire aux lignes de force, une spire conductrice, en forme de circonférence limitant une surface S de 200 centimètres carrés et parcourue par un courant électrique alternatif dont l'intensité i varie, avec la position de la spire dans le tour, comme les ordonnées d'une sinusoïde, entre des valeurs maxima I_0 de signes contraires égales à 10 ampères, en repassant par zéro chaque fois que le plan de la spire a dépassé de $\varphi = 30$ degrés sa position normale aux lignes de force, dans laquelle celles-ci pénètrent dans la spire par la face nord du courant. Quels sont, en unités C. G. S., les moments maximum, minimum et moyen du couple électromagnétique sollicitant la spire tournante?*

Désignons par α, fig. 38, l'angle que fait, à un moment donné, le plan de la spire avec sa position perpendiculaire au champ magnétique.

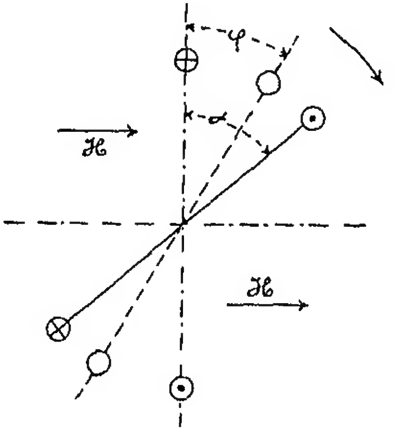

Fig. 38.

L'intensité du courant à cet instant est

$$i = I_0 \sin(\alpha - \varphi).$$

Le flux magnétique embrassé par la spire au même instant a pour valeur

$$\mathfrak{N} = \mathcal{H} S \cos \alpha.$$

Pour un déplacement élémentaire $d\alpha$ de la spire, la variation de l'énergie relative du courant et du champ est

$$dW = - i\, d\mathfrak{N} = - i\, \mathcal{H}\, S \sin\alpha\, d\alpha$$

et le travail effectué par la spire sous l'influence du champ

$$dT = - dW = - i\, \mathcal{H}\, S \sin\alpha\, d\alpha.$$

Le couple correspondant à ce travail a pour expression

$$C = \frac{dT}{d\alpha} = - i\, \mathcal{H}\, S \sin\alpha = - I_0 \sin(\alpha - \varphi)\, \mathcal{H}\, S \sin\alpha.$$

Il s'annule quand $\alpha = 0, \varphi, \pi$ et $\pi + \varphi$.

Il est positif et moteur pendant que α varie de 0 à φ et de π à $\pi + \varphi$, négatif et résistant pendant que α varie de φ à π et de $\pi + \varphi$ à 2π.

Son moment est maximum ou minimum quand α acquiert les valeurs déduites de la condition

$$\frac{d}{d\alpha}\left\{ - \sin(\alpha - \varphi) \sin\alpha \right\} = 0,$$

soit

$$\sin\alpha \cos(\alpha - \varphi) + \sin(\alpha - \varphi)\cos\alpha = 0$$

ou

$$\sin(2\alpha - \varphi) = 0,$$

qui est satisfaite par

$$2\alpha - \varphi = 0,\ \pi,\ 2\pi \text{ et } 3\pi,$$

c'est-à-dire par

$$\alpha = \frac{\varphi}{2} \text{ et } \pi + \frac{\varphi}{2},$$

ainsi que par

$$\alpha = \frac{\pi + \varphi}{2} \text{ et } \pi + \frac{\pi + \varphi}{2}.$$

Pour $\alpha = \varphi/2$ et $\pi + \varphi/2$, C est maximum et l'on a la valeur la plus grande du couple moteur, soit

$$C_{max} = - I_0 \sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right) \mathcal{H}\, S \sin\left(+\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= I_0\, \mathcal{H}\, S \sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Pour $\alpha = (\pi + \varphi)/2$ et $\pi + (\pi + \varphi)/2$, C est minimum et l'on a la valeur la plus grande du couple résistant, soit

$$C_{min} = - I_0 \sin\left(\pm \frac{\pi - \varphi}{2}\right) \mathcal{H} S \sin\left(\pm \frac{\pi + \varphi}{2}\right)$$
$$= - I_0 \mathcal{H} S \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Quant au moment moyen du couple, il répond à la définition

$$C_{moy} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C \, d\alpha,$$

d'où l'on tire

$$C_{moy} = - \frac{I_0 \mathcal{H} S}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\alpha - \varphi) \sin \alpha \, d\alpha$$
$$= - \frac{I_0 \mathcal{H} S}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \left[\cos\varphi \cdot \alpha - \cos\varphi \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2} - \sin\varphi \cdot \sin^2 \alpha\right]_0^{2\pi}$$
$$= - \frac{1}{2} I_0 \mathcal{H} S \cos \varphi.$$

Le couple moyen est résistant quand $\varphi < \pi/2$ et, pour entretenir le mouvement de la spire, il faut alors dépenser de l'énergie mécanique.

Avec

$I_0 = 10 \cdot 10^{-1} = 1$ unité C. G. S. électromagnétique,

$\mathcal{H} = 100$ gauss,

$S = 200$ cm^2,

$\varphi = 30°$, $\sin \frac{\varphi}{2} = 0{,}259$, $\cos \frac{\varphi}{2} = 0{,}966$, $\cos \varphi = 0{,}866$,

on trouve

$$C_{max} = 1 \cdot 100 \cdot 200 \cdot \overline{0{,}259}^2 = 1340 \text{ dynes-cm},$$

$$C_{min} = - 1 \cdot 100 \cdot 200 \cdot \overline{0{,}966}^2 = - 18560 \text{ dynes-cm},$$

$$C_{moy} = - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 \cdot 200 \cdot 0{,}866 = - 8660 \text{ dynes-cm}.$$

56. — *Une roue de Barlow, de $l = 10$ centimètres de rayon, peut tourner, à l'intérieur d'un solénoïde allongé comportant $n_1 = 100$ spires par centimètre de longueur et avec l'enroulement duquel elle est reliée en série, dans un plan normal à l'axe du solénoïde. Quelle différence de potentiel v faut-il maintenir entre le centre et le contact mercuriel périphérique, entre lesquels la résistance électrique mesure $r = 0,1$ ohm, pour réaliser une vitesse de régime de $N = 9$ tours par seconde, si le couple des frottements atteint $C = 5.400$ dynes-centimètres ?*

La puissance absorbée, à la vitesse susdite, par les frottements, qui constituent la seule résistance mécanique à vaincre, est

$$p = 2\pi N C = 2 \cdot 3,14 \cdot 9 \cdot 5400 = 305000 \text{ ergs par seconde}$$
$$\text{ou } 305000 \cdot 10^{-7} = 0,0305 \text{ watt.}$$

Cette puissance est développée par la réaction du champ magnétique $\mathcal{H}$ du solénoïde sur le courant i traversant la roue. D'après la règle de Faraday, on a donc

$$2\pi N C = i \cdot \pi l^2 N \mathcal{H},$$

ou, en remarquant que $\mathcal{H} = 4\pi n_1 i$,

$$C = 2\pi l^2 n_1 i^2.$$

On tire de là

$$i = \sqrt{\frac{C}{2\pi l^2 n_1}} = \sqrt{\frac{5400}{2 \cdot 3,14 \cdot 10^2 \cdot 100}} = 0,2935$$

unités C. G. S. électromagnétiques ou $0,2935 \cdot 10 = 2,935$ ampères.

Mais la puissance totale vi à fournir à la roue est égale à la puissance p augmentée de l'effet Joule $i^2 r$.

Par suite,

$$v = \frac{p + i^2 r}{i} = \frac{0,0305 + 2,935^2 \cdot 0,1}{2,935} = 0,304 \text{ volt.}$$

57. — *Deux circuits circulaires, de même rayon $R = 20$ centimètres, sont parcourus par des courants alternatifs sinusoïdaux de même fréquence $f = 50$ périodes par seconde, dont les amplitudes atteignent la même valeur $I_0 = 100$ ampères et qui sont*

déphasés entr'eux de $\tau = 1/300$ seconde. Ces deux circuits sont disposés de manière à se croiser suivant un diamètre commun. Quelle doit être l'inclinaison mutuelle de leurs plans pour qu'en leur centre s'établisse un champ magnétique tournant d'intensité constante et quelle est alors cette intensité?

Soient

$$i' = I_0 \sin 2\pi ft$$

et

$$i'' = I_0 \sin 2\pi f(t + \tau) = I_0 \sin (2\pi ft + \varphi)$$

les valeurs des courants à un instant quelconque t.

Chacun des courants crée, au centre commun des circuits, un champ magnétique alternatif normal au plan de son cir-

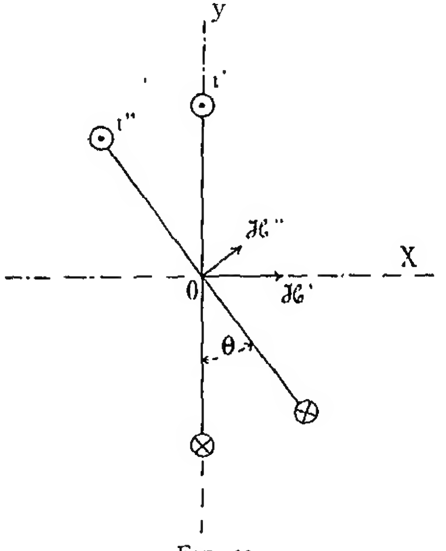

Fig 39

cuit, fig. 39, et les intensités des deux champs sont, au moment considéré,

$$\mathcal{H}' = \frac{2\pi i'}{R} = \frac{2\pi I_0}{R} \sin 2\pi ft = \mathcal{H}_0 \sin 2\pi ft$$

et

$$\mathcal{H}'' = \frac{2\pi i''}{R} = \frac{2\pi I_0}{R} \sin (2\pi ft + \varphi) = \mathcal{H}_0 \sin (2\pi ft + \varphi).$$

Considérons deux axes rectangulaires OX et OY se coupant au centre des circuits et dont le premier est normal au plan du circuit traversé par le courant i', tandis que le second est situé dans ce plan perpendiculairement au diamètre commun.

Projetons les deux champs sur ces axes et désignons par θ l'angle que font entr'eux les plans des deux circuits.

Les composantes de $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ suivant l'axe OX sont

$$\mathcal{H}'_x = \mathcal{H}_0 \sin 2\pi ft,$$

$$\mathcal{H}''_x = \mathcal{H}_0 \sin(2\pi ft + \varphi)\cos\theta;$$

leurs composantes suivant l'axe OY sont

$$\mathcal{H}'_y = 0,$$

$$\mathcal{H}''_y = \mathcal{H}_0 \sin(2\pi ft + \varphi)\sin\theta.$$

L'intensité instantanée $\mathcal{H}_r$ du champ résultant de l'action combinée des deux circuits s'obtient en composant les deux groupes de projections orthogonales suivant la règle du parallélogramme des forces.

Son carré est donc donné par l'équation

$$\mathcal{H}_r^2 = \mathcal{H}_0^2 \left[\{\sin 2\pi ft + \sin(2\pi ft + \varphi)\cos\theta\}^2 + \sin^2(2\pi ft + \varphi)\sin^2\theta \right] \qquad (1)$$

La direction de ce champ tourne autour du diamètre commun et effectue une révolution en une durée égale à $1/f$. On s'en assurera en examinant la valeur ci-dessous de la tangente de l'angle σ qu'elle fait au temps t avec l'axe OX :

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\sin(2\pi ft + \varphi)\sin\theta}{\sin 2\pi ft + \sin(2\pi ft + \varphi)\cos\theta}.$$

Pour que l'intensité du champ résultant reste invariable, il faut que l'expression algébrique entre crochets dans l'équation (1) soit indépendante de t.

Cette expression peut être transformée comme suit :

$$\{\sin 2\pi ft + \sin(2\pi ft + \varphi)\cos\theta\}^2 + \sin^2(2\pi ft + \varphi)\sin^2\theta$$

$$= \sin^2 2\pi ft(1 + \cos^2\varphi + 2\cos\varphi\cos\theta) + \cos^2 2\pi ft \sin^2\varphi$$

$$+ 2\sin 2\pi ft \cos 2\pi ft \sin\varphi (\cos\varphi + \cos\theta)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 4\pi ft)(1 + \cos^2\varphi + 2\cos\varphi\cos\theta)$$

$$+ \frac{1}{2}(1 + \cos 4\pi ft)\sin^2\varphi + \sin 4\pi ft \sin\varphi(\cos\varphi + \cos\theta)$$

$$= 1 + \cos\varphi\cos\theta - (\cos\varphi + \cos\theta)(\cos 4\pi ft \cos\varphi - \sin 4\pi ft \sin\varphi)$$

$$= 1 + \cos\varphi\cos\theta - (\cos\varphi + \cos\theta)\cos(4\pi ft + \varphi).$$

On voit ainsi qu'elle demeure constante lorsque l'angle θ satisfait à la condition

$$\cos\varphi + \cos\theta = 0$$

ou

$$\theta = \pi - \varphi.$$

Sa valeur est alors

$$1 - \cos^2\varphi \quad \text{ou} \quad \sin^2\varphi$$

et de l'équation (1) on déduit, pour l'intensité invariable du champ tournant,

$$\mathcal{H}_r = \mathcal{H}_0 \sin\varphi = \frac{2\pi I_0}{R}\sin\varphi$$

Avec

$$\varphi = 2\pi f\tau = 2\pi \,.\, 50 \,.\, \frac{1}{300} = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad 60^\circ.$$

il faut avoir

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \quad \text{ou} \quad 120^\circ$$

Dans ce cas, si

$$I_0 = 100 \,.\, 10^{-1} = 10 \text{ unités C. G. S. électromagnétiques}$$

et

$$R = 20 \text{ cm},$$

on trouve

$$\mathcal{H}_1 = \frac{2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 10}{20}\sin 60^\circ = 2{,}72 \text{ gauss.}$$

58. — *Un conducteur rectiligne indéfini, parcouru par un courant électrique I de 50 ampères, se trouve dans l'axe d'un tube en fer d'une longueur l de 1 décimètre, dont le diamètre intérieur d_1 et le diamètre extérieur d_2 mesurent respectivement 5 et 10 centimètres, et qui est sectionné suivant un plan axial. Quel est, en kilogrammes, abstraction faite de la pesanteur, l'effort f nécessaire pour séparer par glissement les deux moitiés du tube, si le coefficient de frottement au départ a des surfaces en contact est 0,15 et si la perméabilité μ du métal magnétique est liée à l'induction $\mathcal{B}$ par la formule empirique $\mu = 5{,}3\,\mathcal{B}^{\frac{2}{3}}$, admissible pour le fer doux modérément aimanté ?*

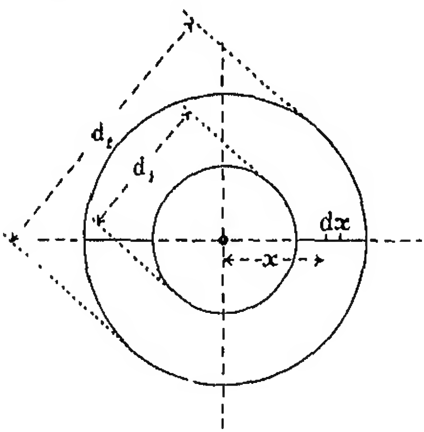

Fig. 40.

Soit F la force portante des deux moitiés du tube aimanté circulairement par le courant axial :

$$f = a\mathrm{F}.$$

Si, à la distance x de l'axe, fig. 40, $\mathcal{H}$ est la force magnétisante du courant et $\mathcal{B}$ l'induction magnétique du fer, on a

$$\mathcal{H} = \frac{2\,\mathrm{I}}{x}$$

et

$$\mathrm{F} = 2\int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}} \frac{\mathcal{B}^2\, l\, dx}{8\,\pi}.$$

Mais, en éliminant μ entre les relations

$$\mathcal{B} = \mu\,\mathcal{H}$$

et

$$\mu = 5{,}3\,\mathcal{B}^{\frac{2}{3}},$$

il vient

$$\mathcal{B} = 5{,}3^3\,\mathcal{H}^3 = \overline{5{,}3}^3\left(\frac{2\,\mathrm{I}}{x}\right)^3 = 148{,}8\,.\,8\,\frac{\mathrm{I}^3}{x^3}.$$

Par suite,

$$\mathrm{F} = \frac{2\,.\,\overline{148{,}8}^2\,.\,8^2\,.\,\mathrm{I}^6\,l}{8\,\pi}\int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}}\frac{dx}{x^6} = 112\,800\,\mathrm{I}^6\,l\left[\frac{x^{-5}}{-5}\right]_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}}$$

$$= 722\,500\,\mathrm{I}^6\,l\left(\frac{1}{d_1^5} - \frac{1}{d_2^5}\right)$$

et

$$f = a\,\mathrm{F} = 722\,500\,a\,\mathrm{I}^6\,l\left(\frac{1}{d_1^5} - \frac{1}{d_2^5}\right).$$

Avec

$a = 0{,}15,$
$\mathrm{I} = 50\,.\,10^{-1} = 5$ unités C. G. S. électromagnétiques,
$l = 10$ cm,
$d_1 = 5$ cm,
$d_2 = 10$ cm,

on trouve

$$f = 722\,500\,.\,0{,}15\,.\,5^6\,.\,10\,.\left(\frac{1}{5^5} - \frac{1}{10^5}\right) = 5\,250\,000 \text{ dynes},$$

soit

$$5\,250\,000\,.\,\frac{1}{981}\,.\,10^{-3} = 5{,}35 \text{ kilogrammes}.$$

59. — *Un circuit parcouru par un courant I de 20 ampères est fermé par une pièce métallique, en forme de demi-circonférence de d = 10 centimètres de diamètre et pesant p = 100 grammes, soutenue verticalement, dans l'entrefer d'un électro-aimant,*

contre les extrémités, situées à la même hauteur, de deux conducteurs fixes contenus dans un plan normal à l'axe horizontal des pôles, fig. 41. L'électro-aimant est pourvu d'un noyau en fonte, de

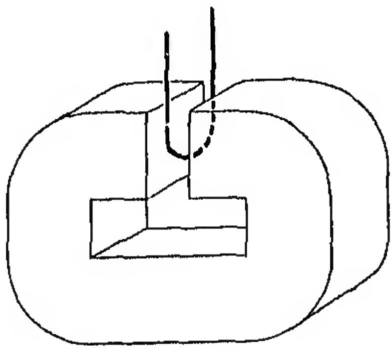

Fig. 41.

section droite constante, d'une longueur moyenne L de 100 centimètres et dont les faces polaires parallèles en regard sont distantes de l = 2 centimètres. Prédéterminer, sans tenir compte des dispersions de flux magnétique, le nombre minimum d'ampères-tours que doit développer l'enroulement magnétisant pour empêcher la chute de la pièce de contact.

L'action électromagnétique du champ $\mathcal{H}$ de l'entrefer sur le courant I dans la pièce de contact doit faire équilibre au poids de celle-ci.

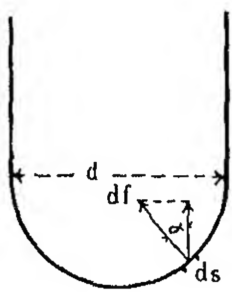

Fig. 42.

Chaque élément *ds* de la demi-circonférence, fig. 42, est

poussé vers le centre par une force dont l'expression générale

$$df = \mathrm{I}\,\mathcal{H}\,ds \sin(\mathcal{H}, ds)$$

se réduit à

$$df = \mathrm{I}\,\mathcal{H}\,ds,$$

puisque l'angle $\mathcal{H}, ds = 90^\circ$, et dont la composante verticale est

$$df' = \mathrm{I}\,\mathcal{H}\,ds \cos\alpha.$$

La force verticale totale opposée au poids p est

$$f' = \mathrm{I}\,\mathcal{H}\,d,$$

attendu que l'intégrale $\int ds \cos\alpha$, étendue à toute la demi-circonférence, est la projection de celle-ci sur le diamètre horizontal.

La condition

$$f' = p$$

exige donc une intensité de champ

$$\mathcal{H} = \frac{p}{\mathrm{I}\,d} = \frac{100 \,.\, 981}{20 \,.\, 10^{-1} \,.\, 10} = 4905 \text{ gauss}$$

Abstraction faite des dispersions de flux, l'équation du circuit magnétique de l'électro-aimant peut s'écrire sous la forme

$$4\pi n i = \mathcal{H}\,l + \frac{\mathcal{B}}{\mu}\,\mathrm{L},$$

en désignant par ni le produit du nombre de spires de l'enroulement magnétisant par l'intensité du courant qui les parcourt et en posant $\mathcal{B} = \mu\mathcal{H}$.

Comme la perméabilité de la fonte correspondant à $\mathcal{B} = 4905$ gauss est 530, il faut, pour retenir la pièce de contact, au moins

$$ni = \frac{4905}{4 \,.\, 3{,}14}\left(2 + \frac{100}{530}\right)$$

$$= 856 \text{ unités C. G. S. électromagnétiques,}$$

soit

$$856 \,.\, 10 = 8560 \text{ ampères-tours.}$$

60. — *Pour mesurer la perméabilité d'un échantillon de fonte par comparaison avec celle d'un étalon de fer doux, on dispose le barreau étalon et un barreau de mêmes dimensions confectionné avec la fonte à essayer, dans des bobines magnétisantes identiques, entre deux culasses massives de fer pourvues de saillies recourbées ménageant un entrefer entre leurs extrémités planes en regard, qui sont orientées suivant le méridien magnétique, fig. 43. On envoie dans les deux bobines des courants électriques dont on règle les sens et les intensités de manière qu'une aiguille aimantée, mobile horizontalement sur pivot au milieu de l'entrefer, reste en équilibre*

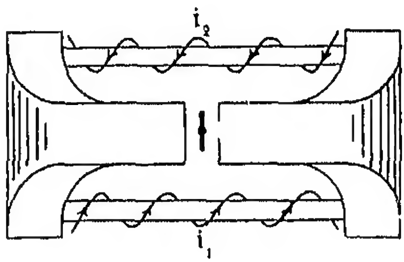

Fig. 43

dans le méridien magnétique. Ce résultat étant atteint, avec des barreaux de $l = 15{,}7$ *centimètres de longueur et des bobines comportant chacune* $n = 250$ *spires, quand les courants* i_1 *et* i_2 *qui circulent autour de l'échantillon et de l'étalon sont respectivement de 10 ampères et 0,3 ampère, quelles sont, dans ces conditions, la perméabilité* μ_1 *de l'échantillon et l'induction magnétique à laquelle elle correspond, si la relation entre la perméabilité* μ_2 *et le champ magnétisant* $\mathcal{H}_2$ *est donnée, pour l'étalon, par une courbe qui peut être assimilée à une droite entre les points définis par les couples de valeurs* $\mathcal{H}_2 = 5$ *gauss,* $\mu_2 = 2000$ *et* $\mathcal{H}_2 = 6{,}5$ *gauss,* $\mu_2 = 1700$?

Soient $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ et $\mathfrak{N}$ les flux magnétiques traversant l'échantillon, l'étalon et le pont constitué par les saillies des culasses; $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}$ les réluctances des parties correspondantes du système.

Pour que l'action directrice des saillies des culasses sur l'aiguille aimantée puisse être annulée, il faut que les sens des courants dans les deux bobines magnétisantes soient tels que

celles-ci ne présentent pas des pôles de même nom du côté de la même culasse.

Quand cette condition est satisfaite, les flux ont des sens opposés dans les barreaux et, d'après la première loi de Kirchhoff, on peut écrire

$$\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2 \pm \mathcal{N} = 0.$$

L'application de la seconde loi de Kirchhoff aux circuits comprenant les saillies des culasses et chacun des barreaux donne alors les relations

$$4\pi n i_1 = \mathcal{N}_1 \mathcal{R}_1 \mp \mathcal{N} \mathcal{R},$$
$$4\pi n i_2 = \mathcal{N}_2 \mathcal{R}_2 \pm \mathcal{N} \mathcal{R}.$$

Lorsque l'aiguille aimantée n'est plus déviée par les saillies des culasses, $\mathcal{N} = 0$, de sorte que $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$.

Il s'ensuit que l'induction a la même valeur $\mathcal{B}$ dans les deux barreaux, dont les sections sont égales, et que, si la réluctance des culasses et de leurs joints avec les barreaux peut être négligée,

$$4\pi n i_1 = \mathcal{B}\frac{l}{\mu_1}, \qquad (1)$$
$$4\pi n i_2 = \mathcal{B}\frac{l}{\mu_2}. \qquad (2)$$

L'équation (2) permet de trouver l'intensité du champ magnétisant auquel l'étalon est soumis :

$$\mathcal{H}_2 = \frac{\mathcal{B}}{\mu_2} = \frac{4\pi n i_2}{l}.$$

En relevant sur la courbe des perméabilités de l'étalon la valeur de μ_2 qui correspond à ce champ, on peut calculer l'induction commune des barreaux :

$$\mathcal{B} = \mu_2 \mathcal{H}_2.$$

Par division des équations (1) et (2) membre à membre, on obtient, d'autre part, la perméabilité de l'échantillon pour cette induction :

$$\mu_1 = \frac{i_2}{i_1}\mu_2.$$

Avec

$n = 250$ spires,

$l = 15,7$ cm,

$i_1 = 10 \,.\, 10^{-1} = 1$ unité C. G. S. électromagnétique,

$i_2 = 0,3 \,.\, 10^{-1} = 0,03$ unité C. G. S. électromagnétique,

il vient

$$\mathcal{H}_2 = \frac{4 \,.\, 3,14 \,.\, 250 \,.\, 0,03}{15,7} = 6 \text{ gauss.}$$

A cette valeur de la force magnétisante correspond, pour l'étalon, une perméabilité

$$\mu_2 = 1700 + (2000 - 1700)\frac{6,5 - 6}{6,5 - 5} = 1800.$$

Par suite,

$$\mathcal{B} = 1800 \,.\, 6 = 10800 \text{ gauss}$$

et la perméabilité de l'échantillon essayé est, pour cette induction,

$$\mu_1 = \frac{0,03}{1} \,.\, 1800 = 54.$$

61. — *Sur un anneau en acier trempé, présentant une fente transversale dont l'épaisseur mesure 1/100 de la longueur de la tige métallique, est enroulée une bobine magnétisante parcourue par un courant électrique qui porte le métal à une certaine induction magnétique. Si, pour l'échantillon d'acier considéré, la courbe cyclique du magnétisme $\mathcal{B} = f(\mathcal{H})$, d'amplitude égale à cette induction, accuse une induction rémanente $\mathcal{B}_0$ de 6500 gauss et une force coercitive $\mathcal{H}_0$ de 40 gauss, quelle est l'induction que conserve l'anneau après suppression du courant, dans l'hypothèse où la courbe susdite est assimilable à une droite entre les inductions $\mathcal{B}_0$ et zéro ?*

Soient l la longueur de la tige annulaire d'acier, λ la longueur d'entrefer ménagée par la fente, $4\pi n i$ la force magnétomotrice développée par un courant i, $\mathcal{B}$ et μ l'induction et la perméabilité correspondantes du métal.

Si l'on peut admettre que la section de passage du flux magnétique dans l'entrefer est la même que dans l'anneau,

$$\mathcal{B} = \frac{4\pi n i}{\dfrac{l}{\mu} + \lambda}.$$

En désignant par $\mathcal{H}$ l'intensité du champ magnétique auquel le métal est soumis,

$$\mu = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{H}},$$

de sorte que

$$\mathcal{B} = \frac{4\pi n i}{\dfrac{l\mathcal{H}}{\mathcal{B}} + \lambda}$$

ou

$$l\mathcal{H} + \lambda\mathcal{B} = 4\pi n i.$$

Quand le courant électrique s'annule, il vient

$$l\mathcal{H} + \lambda\mathcal{B} = 0$$

ou

$$\mathcal{B} = -\frac{l}{\lambda}\mathcal{H}.$$

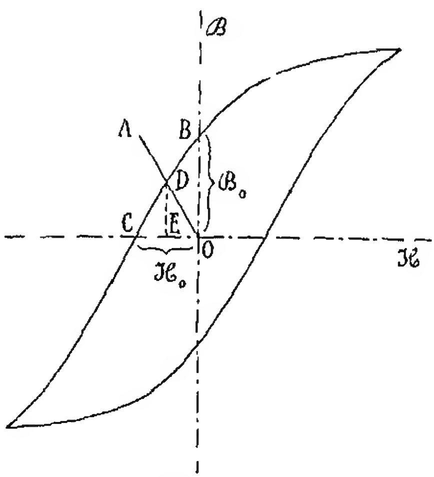

Fig. 44.

Par suite, l'induction magnétique que conserve alors l'anneau est déterminée, fig. 44, par l'ordonnée ED de l'intersection de la droite OA, dont le coefficient angulaire est $-l/\lambda$, avec la courbe figurant, pour l'échantillon d'acier en jeu, la dépendance de l'induction et de la force magnétisante dans le cycle d'aimantation dont les limites d'induction sont numériquement égales à l'induction atteinte pendant le passage du courant.

Si la partie BC de la courbe peut être considérée comme une ligne droite, on a la relation

$$\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OC} - \mathrm{OE}}{\mathrm{OC}};$$

d'où l'on tire, en remarquant que $\mathrm{OB} = \mathcal{B}_0$, $\mathrm{OC} = \mathcal{H}_0$ et $\mathrm{OE} = \mathrm{ED}\,.\,\lambda/l$,

$$\mathrm{ED} = \frac{\mathcal{H}_0\,\mathcal{B}_0}{\mathcal{H}_0 + \dfrac{\lambda}{l}\,\mathcal{B}_0}.$$

Avec

$$\mathcal{H}_0 = 40 \text{ gauss},$$

$$\mathcal{B}_0 = 6\,500 \text{ gauss},$$

$$\frac{\lambda}{l} = 0{,}01,$$

on trouve

$$\mathrm{ED} = \frac{40\,.\,6\,500}{40 + 0{,}01\,.\,6\,500} = 2\,475 \text{ gauss}.$$

Chapitre V.

INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

62. — *Si la terre pouvait être assimilée à un aimant sphérique uniforme, quelle serait, en volts, la force électromotrice induite dans un conducteur allant d'un pôle à l'équateur et ne participant pas au mouvement de rotation diurne, étant admis qu'aux pôles l'intensité du champ magnétique terrestre vaut 0,66 gauss ?*

Soient $\mathfrak{N}$ le flux magnétique émis par l'hémisphère sud et ω la vitesse angulaire du mouvement de rotation diurne. Le nombre de lignes de force coupées par le conducteur fixe pendant que la terre tourne d'un radian autour de son axe étant $\mathfrak{N}/2\pi$, la force électromotrice induite aurait pour valeur

$$e = \frac{\omega \mathfrak{N}}{2\pi}.$$

L'induction magnétique $\mathcal{B}$ d'un aimant sphérique uniforme est liée à l'intensité d'aimantation $\mathcal{J}$ de celui-ci, dont les pôles exercent une force démagnétisante égale à $4\pi\mathcal{J}/3$, par la formule

$$\mathcal{B} = -\frac{4}{3}\pi\mathcal{J} + 4\pi\mathcal{J} = \frac{8}{3}\pi\mathcal{J}.$$

Par suite, si πR^2 est la surface du plan équatorial de la terre,

$$\mathcal{M} = \frac{8}{3}\pi \mathcal{J} \,.\, \pi R^2 = \frac{8}{3}\pi^2 R^2 \mathcal{J}.$$

On peut considérer un aimant sphérique uniforme comme constitué par l'ensemble de deux sphères fictives, pleines l'une d'agent magnétique positif, l'autre d'agent magnétique négatif, et déplacées l'une par rapport à l'autre, suivant la direction de l'aimantation, d'une longueur infiniment petite ε, telle qu'en désignant par δ la densité cubique de l'agent remplissant ces sphères, on ait $\delta\varepsilon = \mathcal{J}$. En un point du prolongement de l'axe magnétique de l'aimant, situé, du côté du pole nord, à une distance a du milieu de l'intervalle séparant les centres des sphères fictives, l'intensité du champ dû à l'aimant est donc

$$\mathcal{H} = \frac{4}{3}\pi R^3 \delta \left[\frac{1}{\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \right] = \frac{4}{3}\pi R^3 \delta \frac{2a\varepsilon}{\left(a^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{8}{3}\pi R^3 \delta \frac{\varepsilon}{a^3} = \frac{8}{3}\pi \frac{R^3 \mathcal{J}}{a^3},$$

en négligeant l'infiniment petit d'ordre supérieur $\frac{\varepsilon^2}{4}$.

A l'extrémité nord de l'axe magnétique, où $a = R$, on a

$$\mathcal{H} = \frac{8}{3}\pi \mathcal{J}.$$

Telle serait l'expression de l'intensité du champ magnétique terrestre au pôle sud, de sorte qu'on pourrait écrire

$$\mathcal{J} = \frac{3}{8\pi}\mathcal{H},$$

$$\mathcal{M} = \frac{8}{3}\pi^2 R^2 \,.\, \frac{3}{8\pi}\mathcal{H} = \pi R^2 \mathcal{H},$$

$$e = \frac{\omega}{2\pi} \,.\, \pi R^2 \mathcal{H} = \frac{\omega R^2 \mathcal{H}}{2}.$$

Puisque

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7{,}27 \cdot 10^{-5} \text{ radian par seconde,}$$

$$R = \frac{4 \cdot 10^9}{2\pi} = 6{,}37 \cdot 10^8 \text{ cm,}$$

$$\mathcal{H} = 0{,}66 \text{ gauss,}$$

il viendrait

$$e = \frac{7{,}27 \cdot 10^{-5} \cdot \overline{6{,}37}^2 \cdot 10^{16} \cdot 0{,}66}{2}$$

$$= 9{,}73 \cdot 10^{12} \text{ unités C. G. S. électromagnétiques,}$$

soit

$$9{,}73 \cdot 10^{12} \cdot 10^{-8} = 97\,300 \text{ volts.}$$

63. — *Soit, fig. 45, un courant continu, rectiligne et indéfini de I = 1000 ampères. Dans un plan qui le contient, on fait pivoter*

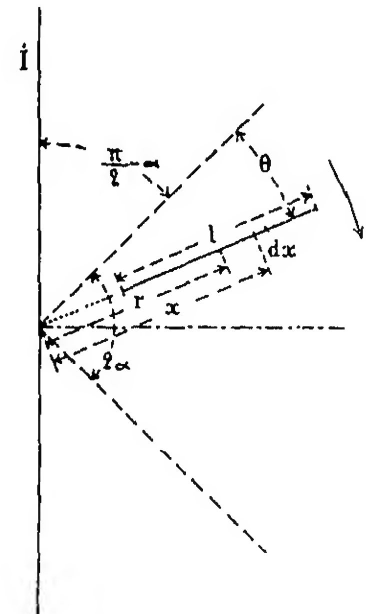

Fig. 45.

radialement, à la vitesse angulaire ω de 2π radians par seconde, un conducteur droit de $l = 50$ centimètres de longueur, de manière que ses points décrivent, autour d'un point du courant comme centre, des arcs de circonférence correspondant à un angle au centre 2α de 90 degrés, dont la bissectrice est perpendiculaire à la direction du courant. Quelle est, en microvolts, la valeur efficace de la force électromotrice induite dans le conducteur par ce déplacement ?

Considérons le conducteur dans une position intermédiaire, définie par l'angle θ qu'il fait avec sa position initiale, inclinée de l'angle $\pi/2 - \alpha$ sur la partie du courant indéfini dont il s'éloigne, et soit dx un élément du conducteur à la distance x du centre de rotation.

Au point où se trouve l'élément, le champ magnétique dû au courant indéfini a l'intensité

$$\mathcal{H} = \frac{2\,\mathrm{I}}{x \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \theta\right)} = \frac{2\,\mathrm{I}}{x \cos(\alpha - \theta)}.$$

Le flux coupé par l'élément pendant que le conducteur tourne de l'angle $d\theta$ est

$$d\Phi = \mathcal{H} \,.\, dx \,.\, x\, d\theta = \frac{2\,\mathrm{I}}{\cos(\alpha - \theta)}\, dx\, d\theta.$$

dt étant la durée correspondante, la force électromotrice instantanée induite dans l'élément vaut

$$de = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2\,\mathrm{I}}{\cos(\alpha - \theta)}\, dx \frac{d\theta}{dt} = \frac{2\,\mathrm{I}\,\omega}{\cos(\alpha - \theta)}\, dx.$$

Si le milieu du conducteur décrit un arc de rayon r, la force électromotrice totale dont le conducteur est le siège présente, au même moment, la valeur

$$e = \frac{2\,\mathrm{I}\,\omega}{\cos(\alpha - \theta)} \int_{r - \frac{l}{2}}^{r + \frac{l}{2}} dx = \frac{2\,\mathrm{I}\,\omega}{\cos(\alpha - \theta)} \,.\, l = \frac{2\,\mathrm{I}\,\omega\, l}{\cos(\alpha - \omega t)},$$

en désignant par t le temps que le conducteur met à balayer l'angle θ.

La durée de la variation 2α de θ étant $2\alpha/\omega$, on trouve, pour le carré de la valeur efficace de la force électromotrice totale,

$$E^2 = \frac{1}{\left(\frac{2\alpha}{\omega}\right)} \int_0^{\frac{2\alpha}{\omega}} e^2\,dt = \frac{\omega}{2\alpha} \cdot 4\,I^2\,\omega^2\,l^2 \int_0^{\frac{2\alpha}{\omega}} \frac{dt}{\cos^2(\alpha - \omega t)}$$

$$= \frac{2\,I^2\,\omega^3\,l^2}{\alpha} \cdot -\frac{1}{\omega}\Big[\operatorname{tg}(\alpha - \omega t)\Big]_0^{\frac{2\alpha}{\omega}} = \frac{4\,I^2\,\omega^2\,l^2}{\alpha}\operatorname{tg}\alpha\,;$$

d'où l'on tire

$$E = 2\,I\,\omega\,l\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}}.$$

Avec

$I = 1000 \cdot 10^{-1} = 100$ unités C. G. S. électromagnétiques,

$\omega = 2\pi$ radians par seconde,

$l = 50$ cm,

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ et $\operatorname{tg}\alpha = 1$,

il vient

$$E = 2 \cdot 100 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot \sqrt{\frac{4}{3{,}14}}$$

$= 70900$ unités C. G. S. électromagnétiques,

soit

$$70900 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{6} = 709 \text{ microvolts}$$

64. — *Une spire conductrice, fermée sur elle-même en forme de triangle, fig. 40, présente une résistance électrique r de 0,05 ohm et se trouve, dans un plan passant par un conducteur rectiligne indéfini, de telle manière qu'un de ses sommets soit sur ce dernier, auquel son côté opposé, dont la longueur l mesure 1 mètre, est parallèle. Évaluer, en microcoulombs, la quantité d'électricité*

induite dans la spire quand l'intensité du courant continu traversant le conducteur indéfini subit une diminution de 100 ampères.

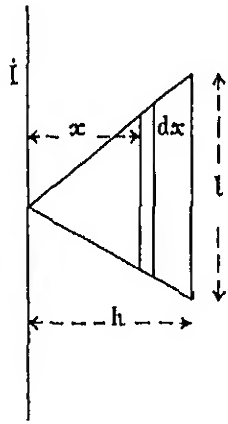

Fig. 46.

Soit h la distance du conducteur indéfini au coté parallèle du triangle.

$2\,I/x$ étant l'intensité du champ magnétique à une distance x du conducteur indéfini, quand celui-ci est traversé par un courant I, le flux à travers un élément de surface du triangle, de largeur dx et de longueur $\frac{x}{h}\,l$, vaut

$$d\mathcal{N} = \frac{2\,I}{x} \cdot \frac{x}{h}\, l \,.\, dx = 2\,I\, \frac{l}{h}\, dx$$

et le flux total embrassé par le triangle a pour expression

$$\mathcal{N} = 2\,I\,\frac{l}{h} \int_0^h dx = 2\,I\,l.$$

Si i désigne l'intensité instantanée du courant induit dans la spire triangulaire, dont le coefficient de self-induction est $\mathcal{L}$, lorsque le courant I passe d'une valeur constante I_1 à une valeur constante I_2,

$$i = \frac{-\frac{d\mathcal{N}}{dt} - \mathcal{L}\frac{di}{dt}}{r}$$

ou

$$i\,dt = -\frac{2\,l}{r}\,d\mathrm{I} - \frac{\mathcal{L}}{r}\,di,$$

et il vient, pour la quantité d'électricité $q = \int i\,dt$ déplacée dans le circuit induit,

$$q = -\frac{2\,l}{r}\int_{\mathrm{I}_1}^{\mathrm{I}_2} d\mathrm{I} - \frac{\mathcal{L}}{r}\int_0^0 di = \frac{2\,l}{r}(\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2),$$

attendu que le courant induit est nul quand le courant inducteur demeure invariable.

Avec

$l = 100$ cm,

$r = 0{,}05 \,.\, 10^9$ unités C. G. S. électromagnétiques,

$\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2 = 100 \,.\, 10^{-1} = 10$ unités C. G. S. électromagnétiques,

on trouve

$$q = \frac{2 \,.\, 100}{0{,}05 \,.\, 10^9}\,10 = 0{,}00004 \text{ unité C. G. S. électromagnétique,}$$

soit

$$0{,}00004 \,.\, 10 \,.\, 10^6 = 400 \text{ microcoulombs.}$$

65. — *Autour du milieu du noyau en fer doux d'un long solénoïde est enroulée une bobine de fil conducteur comportant $n = 200$ spires, dont les extrémités sont reliées à un galvanomètre par l'intermédiaire d'une résistance électrique $R = 1400$ ohms. La résistance de la bobine mesure $r = 50$ ohms, celle du galvanomètre $g = 350$ ohms. Le solénoïde présente $n_1 = 6$ spires par centimètre de longueur et son noyau a une section $s = 1$ centimètre carré. La constante balistique K du galvanomètre vaut 0,003 radian par microcoulomb. Sachant que, lorsqu'on renverse le sens du courant traversant le solénoïde, le trait lumineux du galvanomètre, utilisé suivant la méthode objective de lecture par réflexion, subit une élongation $d = 200$ divisions sur une échelle circulaire située à $l = 1500$ divisions du miroir mobile, évaluer, en ampères, l'intensité du courant dans le solénoïde.*

L'élongation d sur l'échelle courbe à la distance l du miroir accuse un angle d/l entre le rayon lumineux réfléchi et le rayon lumineux incident, et, par suite, une rotation de l'équipage mobile du galvanomètre

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{d}{l} = \frac{1}{2}\cdot\frac{200}{1500} = 0,0666 \text{ radian.}$$

qui mesure une quantité d'électricité

$$q = \frac{\varphi}{K} = \frac{0,0666}{0,003} = 22,2 \text{ microcoulombs,}$$

soit

$$22,2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-1} = 0,00000222 \text{ unité C. G. S. électromagnétique.}$$

Le flux magnétique variant de $-\mathfrak{N}$ à $+\mathfrak{N}$ à travers la région médiane du noyau du solénoïde quand on change le sens du courant dans ce dernier, on a la relation

$$q = \frac{n \cdot 2\mathfrak{N}}{r + g + R},$$

d'où l'on tire

$$\mathfrak{N} = \frac{q(r + g + R)}{2n} = \frac{0,00000222 \cdot (50 + 350 + 1400)\,10^{9}}{2 \cdot 200}$$

$$= 10000 \text{ maxwells.}$$

Le flux $\mathfrak{N}$ détermine dans le noyau une induction

$$\mathcal{B} = \frac{\mathfrak{N}}{s} = \frac{10000}{1} = 10000 \text{ gauss,}$$

à laquelle correspondent, pour le fer doux, une perméabilité $\mu = 2000$ et une force magnétisante

$$\mathcal{H} = \frac{\mathcal{B}}{\mu} = \frac{10000}{2000} = 5 \text{ gauss.}$$

Pour développer cette force magnétisante, le solénoïde doit être traversé par un courant

$$i = \frac{\mathcal{H}}{4\pi n_1} = \frac{5}{4 \cdot 3,14 \cdot 6} = 0,0664 \text{ unité C. G. S. électromagnétique}$$

ou

$$0,0664 \cdot 10 = 0,664 \text{ ampère.}$$

66. — *Sur le milieu d'une tige aimantée, dont la longueur mesure $l = 2$ décimètres et le moment magnétique $\mathfrak{A} = 2000$ unités C. G. S., est enroulée une bobine de fil conducteur, comportant $n = 1000$ spires et dont les extrémités sont reliées, par un commutateur-inverseur, aux deux électrodes en cuivre d'un voltamètre à sulfate de cuivre. On communique à la bobine, le long de l'aimant, un mouvement alternatif d'une amplitude plus grande que la longueur de la tige et, chaque fois qu'elle quitte l'une ou l'autre extrémité de l'aimant, on retourne celui-ci bout pour bout, de même qu'on intervertit les connexions avec le voltamètre chaque fois qu'elle franchit le milieu de la tige. Combien d'oscillations complètes autour du milieu de l'aimant la bobine devrait-elle effectuer pour modifier d'un milligramme le poids des électrodes, si la résistance totale du voltamètre et de la bobine vaut $r = 50$ ohms?*

Le retournement de l'aimant et le jeu du commutateur-inverseur ont pour effet d'envoyer dans un même sens à travers le voltamètre les courants successivement induits dans la bobine, fig. 47.

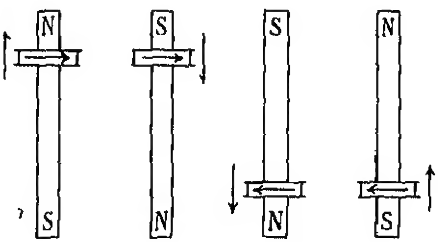

Fig. 47.

Soit $\mathfrak{N}$ le flux magnétique produit par l'aimant. Le flux varie numériquement quatre fois de la valeur $\mathfrak{N}$ à travers la bobine pendant que celle-ci accomplit une oscillation complète autour du milieu de l'aimant. Cette variation fait passer dans le voltamètre, qui ne développe pas de force électromotrice de polarisation, une quantité d'électricité induite

$$q = n\frac{4\mathfrak{N}}{r}.$$

Mais, abstraction faite de la réaction des pôles, de masse $\mathfrak{A}/l$, dans la région médiane de l'aimant, supposé uniforme,

$$\mathfrak{N} = 4\pi \frac{\mathfrak{A}}{l}.$$

Par suite,

$$q = \frac{4n}{r} \cdot \frac{4\pi \mathfrak{A}}{l} = \frac{16 \cdot 3{,}14 \cdot 1000 \cdot 2000}{50 \cdot 10^9 \cdot 20}$$
$$= 0{,}0001 \text{ unité C. G. S. électromagnétique,}$$

soit

$$0{,}0001 \cdot 10 = 0{,}001 \text{ coulomb.}$$

Comme l'équivalent électrochimique du cuivre est 0,327 milligramme par coulomb, il faut, pour libérer un milligramme de ce métal, $1/0{,}327 = 3{,}06$ coulombs. La bobine devrait donc effectuer

$$\frac{3{,}06}{0{,}001} = 3060 \text{ oscillations complètes.}$$

67. — *Un disque conducteur, de D = 25 centimètres de diamètre, est mobile autour de son axe dans un champ magnétique uniforme, dont l'intensité $\mathcal{H}$ est égale à 3000 gauss et dont la direction est normale à son plan. Sachant que le disque est parcouru, du centre à la périphérie, par un courant i de 10 ampères, fourni par une source d'électricité développant une force électromotrice E de 2 volts, et que la résistance totale r du circuit mesure 0,196 ohm, évaluer la vitesse de rotation du disque et la puissance absorbée par ses frottements.*

En tournant, le disque engendre une force contre-électromotrice

$$e = \mathrm{E} - ir = 2 - 10 \cdot 0{,}196 = 0{,}04 \text{ volt,}$$

qui est liée à la vitesse de rotation, N tours par seconde, par la formule

$$e \cdot 10^8 = \mathcal{H} \cdot \pi \frac{\mathrm{D}^2}{4} \cdot \mathrm{N},$$

d'où l'on tire

$$N = \frac{4\, e \,.\, 10^8}{\pi\, D^2\, \mathcal{H}} = \frac{4\,.\,0{,}04\,.\,10^8}{3{,}14\,.\,\overline{25}^2\,.\,3000}$$

$$= 2{,}71 \text{ révolutions par seconde.}$$

Quant à la puissance absorbée par les frottements du disque, elle vaut

$$e\,i = 0{,}04\,.\,10 = 0{,}4 \text{ watt.}$$

68. — *Évaluer, en microjoules, abstraction faite de la self-induction et des frottements, le travail nécessaire pour entretenir, avec une vitesse angulaire de 2π radians par seconde, le mouvement de rotation d'une spire conductrice circulaire, autour d'une tangente verticale dans un champ magnétique uniforme horizontal dont l'intensité est égale à 150 gauss, pendant un quart de tour à partir d'une position dans laquelle le plan de la spire est normal à la direction du champ. Le diamètre et la résistance électrique de la spire mesurent respectivement 3 décimètres et 20000 microhms.*

Soit, à un instant t, α l'angle que fait le plan de la spire avec sa position perpendiculaire aux lignes de force magnétique,

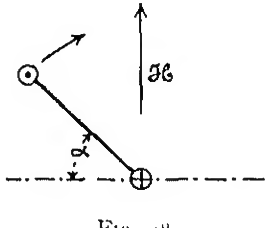

Fig. 48

fig. 48. Désignons par $\mathcal{H}$ l'intensité du champ, par s la surface de la spire, par r la résistance électrique de celle-ci et par ω la vitesse angulaire du mouvement.

Au moment considéré, la spire embrasse un flux magnétique

$$\mathcal{N} = \mathcal{H}\, s \cos\alpha.$$

Elle est alors le siège d'une force électromotrice d'induction

$$e = -\frac{d\mathcal{N}}{dt} = \mathcal{H}\, s \sin\alpha\, \frac{d\alpha}{dt} = \mathcal{H}\, s\, \omega \sin\alpha,$$

déterminant un courant

$$i = \frac{e}{r} = \frac{\mathcal{H} s \omega}{r} \sin \alpha.$$

Quand la spire tourne d'un angle $d\alpha$, son énergie potentielle dans le champ varie de

$$dW = -i\, d\mathcal{N} = -\frac{\mathcal{H} s \omega}{r} \sin \alpha \,.\, -\mathcal{H} s \sin \alpha\, d\alpha$$
$$= \frac{\mathcal{H}^2 s^2 \omega}{r} \sin^2 \alpha\, d\alpha.$$

Le travail des forces électromagnétiques pendant ce déplacement élémentaire est

$$dT = -dW = -\frac{\mathcal{H}^2 s^2 \omega}{r} \sin^2 \alpha\, d\alpha$$

et le travail correspondant à la rotation entre les positions définies par $\alpha = 0$ et $\alpha = 90^{\circ}$ a pour expression

$$T = -\frac{\mathcal{H}^2 s^2 \omega}{r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha\, d\alpha = -\frac{\mathcal{H}^2 s^2 \omega}{r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\, d\alpha$$
$$= -\frac{\pi \mathcal{H}^2 s^2 \omega}{4r}.$$

T est négatif : le mouvement de la spire exige une dépense d'énergie mécanique pour vaincre l'action freinante du champ inducteur sur le courant induit.

Quand

$\mathcal{H} = 150$ gauss,

$s = \dfrac{3,14 \,.\, 30^2}{4} = 706\ \text{cm}^2$,

$\omega = 2 \,.\, 3,14 = 6,28$ radians par seconde,

$r = 20000 \,.\, 10^{-6} \,.\, 10^9 = 2 \,.\, 10^7$ unités C. G. S. électromagnétiques,

on trouve, pour la valeur numérique du travail requis,

$$\frac{3,14 \,.\, 150^2 \,.\, 706^2 \,.\, 6,28}{4 \,.\, 2 \,.\, 10^7} = 2765 \text{ ergs},$$

soit

$$2765 \,.\, 10^{-7} \,.\, 10^6 = 276,5 \text{ microjoules}.$$

69. — *Un disque circulaire en cuivre, dont la densité δ est égale à 8,8 grammes masse par centimètre cube et l'épaisseur e à 2 millimètres, tourne horizontalement, avec une certaine vitesse angulaire ω_0, autour de son axe, dans un champ magnétique uniforme de direction verticale, dont l'intensité $\mathcal{H}$ vaut 3000 gauss. Le centre et la périphérie du disque sont reliés, par l'intermédiaire de frotteurs, à un conducteur non-inductif, de manière à constituer un circuit fermé d'une résistance R de 0,3 ohm. Si l'on supprimait la force motrice, au bout de combien de temps la vitesse du disque abandonné à lui-même serait-elle réduite de moitié, abstraction faite de l'influence des frottements ?*

Soient Ω le moment d'inertie du disque et ω la vitesse angulaire à un instant t de la période de ralentissement.

La diminution de l'énergie cinétique du disque pendant l'élément de temps dt est

$$- d\left(\frac{1}{2}\,\Omega\,\omega^2\right) = -\,\Omega\,\omega\,d\omega.$$

Elle est égale au travail électromagnétique élémentaire exprimé par le produit de l'intensité instantanée i du courant induit, dû à la rotation du disque dans le champ, et du nombre de lignes de force $\mathcal{H}\,.\,\frac{1}{2}\,\omega\,r^2\,dt$ qu'un rayon du disque, de longueur r, coupe en cette durée infiniment petite.

La force électromotrice d'induction étant mesurée par le flux coupé en l'unité de temps,

$$i = \frac{1}{R}\,.\,\mathcal{H}\,.\,\frac{\omega\,r^2}{2},$$

et il vient

$$-\,\Omega\,d\omega = \frac{\mathcal{H}^2\,r^4}{4\,R}\,\omega\,dt$$

On déduit de la dernière égalité

$$-\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\omega} = \frac{\mathcal{H}^2\,r^4}{4\,R\,\Omega}\int_0^t dt$$

ou

$$\log_e \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\mathcal{H}^2 r^4}{4 R \Omega} t.$$

Or, si l'on désigne par x une longueur comprise entre o et r,

$$\Omega = \int_0^r x^2 . \delta . 2 \pi x e \, dx = 2 \pi \delta e \frac{r^4}{4}.$$

On peut donc écrire

$$\log_e \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\mathcal{H}^2}{2 \pi \delta e R} t;$$

d'où l'on tire

$$t = \frac{2 \pi \delta e R}{\mathcal{H}^2} \log_e \frac{\omega_0}{\omega}.$$

En faisant, dans cette équation,

$\delta = 8{,}8$ grammes masse par cm^3,

$e = 0{,}2$ cm,

$R = 0{,}3 . 10^9$ unités C. G. S. électromagnétiques,

$\mathcal{H} = 3000$ gauss,

$\log_e \frac{\omega_0}{\omega} = \log_e 2 = 0{,}693$,

on trouve

$$t = \frac{2 . 3{,}14 . 8{,}8 . 0{,}2 . 0{,}3 . 10^9}{3000^2} . 0{,}693 = 255 \text{ secondes}$$

ou 4,25 minutes.

70. — *Un disque métallique circulaire, pesant 500 grammes est disposé dans un champ magnétique uniforme, dont l'intensité est égale à 5 gauss et dont la direction est normale à son plan. Au moment où, en vertu de la force vive qui lui a été communiquée, il tourne autour de son axe à la vitesse de 1 révolution par seconde, on relie le centre et la périphérie, par des contacts mobiles, à un conducteur non-inductif. Quelle serait, en ampères-heures, la quantité d'électricité traversant le conducteur de liaison pendant que le disque revient au repos, si l'on pouvait faire abstraction des résistances de frottement?*

Désignons par $\mathcal{H}$ l'intensité du champ magnétique, par r le rayon du disque, par Ω le moment d'inertie de celui-ci et par R la résistance totale du circuit électrique.

Soient, à un instant t compté à partir du moment de la fermeture du circuit, ω la vitesse angulaire du disque, e la force électromotrice d'induction dont il est le siège et i l'intensité du courant.

La quantité d'électricité cherchée est donnée par l'expression

$$\int_0^\infty i\,dt = \int_0^\infty \frac{e}{R}\,dt = \frac{1}{R}\int_0^\infty \mathcal{H}\,.\,\frac{\omega r^2}{2}\,.\,dt = \frac{\mathcal{H} r^2}{2\,R}\int_0^\infty \omega\,dt.$$

Pour obtenir la relation entre ω et t, il suffit d'écrire que la variation de l'énergie cinétique $\Omega\omega^2/2$ du disque, prise en signe contraire, est égale au travail élémentaire du courant électrique :

$$-\,\Omega\,\omega\,d\omega = e\,i\,dt = \frac{\mathcal{H}\,\omega\,r^2}{2}\cdot\frac{\mathcal{H}\,\omega\,r^2}{2\,R}\,dt = \frac{\mathcal{H}^2 r^4}{4\,R}\,\omega^2\,dt.$$

On tire de là

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\,\frac{\mathcal{H}^2 r^4}{4\,R\,\Omega}\,dt$$

et, en représentant par ω_0 la vitesse initiale,

$$\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\omega} = -\,\frac{\mathcal{H}^2 r^4}{4\,R\,\Omega}\int_0^t dt$$

ou

$$\log_e \frac{\omega}{\omega_0} = -\,\frac{\mathcal{H}^2 r^4}{4\,R\,\Omega}\,t$$

ou encore, en représentant par e la base des logarithmes népériens,

$$\omega = \omega_0\,e^{-\frac{\mathcal{H}^2 r^4}{4\,R\,\Omega}t}.$$

Par suite,

$$\int_0^{\infty} i\,dt = \frac{\mathcal{H}\,r^2\,\omega_0}{2\,\mathrm{R}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\mathcal{H}^2 r^4}{4\,\mathrm{R}\,\Omega} t}\,dt = \frac{\mathcal{H}\,r^2\,\omega_0}{2\,\mathrm{R}} \cdot \frac{4\,\mathrm{R}\,\Omega}{\mathcal{H}^2\,r^4} \left[-e^{-\frac{\mathcal{H}^2 r^4}{4\,\mathrm{R}\,\Omega} t} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{2\,\omega_0\,\Omega}{\mathcal{H}\,r^2}.$$

Si M est la masse du disque et N le nombre de révolutions par unité de temps correspondant à ω_0, on a

$$\omega_0 = 2\pi\,\mathrm{N}$$

et

$$\Omega = \frac{\mathrm{M}\,r^2}{2},$$

de sorte que

$$\int_0^{\infty} i\,dt = \frac{2\pi\,\mathrm{N}\,\mathrm{M}}{\mathcal{H}}.$$

Avec

$\mathrm{N} = 1$ tour par seconde,

$\mathrm{M} = 500$ grammes masse,

$\mathcal{H} = 5$ gauss,

il vient

$$\int_0^{\infty} i\,dt = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 500}{5} = 628 \text{ unités C. G. S. électromagnétiques,}$$

soit

$$6280 \text{ coulombs ou } \frac{6280}{3600} = 1{,}745 \text{ ampère-heure.}$$

71. — *Supposons qu'il soit possible de réaliser un champ magnétique rayonnant, autour d'un axe vertical, $\mathfrak{N} = 250$ lignes de force par radian et par centimètre de hauteur. Soit, en un point de l'axe de ce champ, le centre d'un anneau horizontal pesant 15 grammes et formé de $n = 20$ spires de fil conducteur reliées*

en série. Si l'anneau tombait librement, dans quel rapport l'accélération du mouvement serait-elle réduite, après 7 secondes de chute à partir du repos, par le maintien en court-circuit de l'enroulement, abstraction faite de la self-induction de ce dernier, dont la résistance mesure R = 0,1 ohm ?

Soient P et M respectivement le poids et la masse de l'anneau.

Si, au temps t compté à partir de l'origine de la chute, le chemin parcouru est x, la vitesse v et la force électromotrice induite dans l'enroulement e, on peut écrire, en appliquant le principe de la conservation de l'énergie,

$$P\,dx = d\left(\frac{1}{2}M v^2\right) + \frac{e^2}{R}\,dt.$$

Or,

$$e = n \,.\, 2\pi\mathcal{M} \,.\, v$$

et

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

Il vient, par suite,

$$P\,v\,dt = M\,v\,dv + \frac{1}{R}\,4\pi^2 n^2 \mathcal{M}^2 v^2\,dt$$

ou

$$dt = \frac{M\,dv}{P - \frac{1}{R}\,4\pi^2 n^2 \mathcal{M}^2 v}.$$

On tire de là

$$\int_0^t dt = M\int_0^v \frac{dv}{P - \frac{1}{R}\,4\pi^2 n^2 \mathcal{M}^2 v}$$

et, en effectuant l'intégration,

$$t = -\frac{MR}{4\pi^2 n^2 \mathcal{M}^2}\log_e \frac{P - \frac{1}{R}\,4\pi^2 n^2 \mathcal{M}^2 v}{P}.$$

Cette équation, mise sous la forme

$$v = \frac{R}{4\pi^2 n^2 \mathfrak{N}^2} P \left(1 - e^{-\frac{4\pi^2 n^2 \mathfrak{N}^2}{MR} t} \right),$$

où e désigne la base des logarithmes népériens, définit la vitesse au temps t.

On peut en déduire l'accélération correspondante φ :

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{RP}{4\pi^2 n^2 \mathfrak{N}^2} \left(- e^{-\frac{4\pi^2 n^2 \mathfrak{N}^2}{MR} t} \right) \left(- \frac{4\pi^2 n^2 \mathfrak{N}^2}{MR} \right)$$

$$= \frac{P}{M} e^{-\frac{4\pi^2 n^2 \mathfrak{N}^2}{MR} t}.$$

Mais le quotient P/M est précisément l'accélération constante g que déterminerait la pesanteur si, le circuit de l'anneau étant ouvert, il ne pouvait pas se former de courant induit amortisseur.

L'influence de celui-ci réduit donc l'accélération dans le rapport 1 à

$$e^{-\frac{4\pi^2 n^2 \mathfrak{N}^2}{MR} t}.$$

Avec

$n = 20$ spires,

$\mathfrak{N} = 250$ maxwells par radian et par cm,

$M = 15$ grammes masse,

$R = 0,1 \cdot 10^9$ unités C. G. S. électromagnétiques,

on trouve, pour $t = 7$ secondes, une réduction de 1 à

$$e^{-\frac{4 \cdot \overline{3,14}^2 \cdot 20^2 \cdot \overline{250}^2}{15 \cdot 0,1 \cdot 10^9} 7} = \frac{1}{e^{4,6}} = 0,01.$$

72. — *Une bobine, en forme de boule, est constituée par $n = 200$ spires de fil conducteur enroulées, en une couche, suivant les parallèles, correspondant à des plans équidistants, d'une sphère de $R = 10$ centimètres de rayon. Calculer, en joules, la chaleur dégagée par l'extra-courant de cette bobine, quand on interrompt le courant de $I = 1$ ampère qui y circule.*

Soient, à un instant t de la période variable d'ouverture du circuit, e et i les valeurs de la force électromotrice et du courant dans la bobine.

L'énergie libérée par l'extra-courant est donnée par l'intégrale

$$W = \int e\, i\, dt,$$

étendue à la durée de l'extra-courant.

Si $\mathcal{L}$ représente le coefficient de self-induction constant de l'enroulement,

$$e = -\mathcal{L}\frac{di}{dt}$$

et l'on a

$$W = -\mathcal{L}\int_{I}^{0} i\, di = \frac{1}{2}\mathcal{L}I^2.$$

Cherchons l'expression de $\mathcal{L}$.

La bobine, parcourue par un courant quelconque i, peut être assimilée à un aimant sphérique, composé de n feuillets magnétiques d'épaisseur $2R/n$ et dont l'intensité d'aimantation $\mathcal{J}$ vaut $i/(2R/n) = ni/2R$.

A l'intérieur d'une fente infiniment mince, pratiquée dans cet aimant normalement à son axe, la force exercée sur une unité de masse magnétique, par les parois de la fente et les pôles libres, serait parallèle à l'axe et égale à $4\pi\mathcal{J} - 4\pi\mathcal{J}/3 = 8\pi\mathcal{J}/3$.

Le champ magnétique interne de la bobine est donc uniforme et a une intensité

$$\mathcal{H} = \frac{8}{3}\pi\frac{ni}{2R} = \frac{4}{3}\pi\frac{ni}{R}.$$

De part et d'autre du plan équatorial de la sphère, les aires des spires successives sont, en s'éloignant de ce plan, fig. 49,

$$\pi\left(R^2 - \frac{R^2}{n^2}\right),\quad \pi\left(R^2 - 3^2 \cdot \frac{R^2}{n^2}\right),\quad \ldots,\quad \pi\left(R^2 - \overline{n-1}^2 \cdot \frac{R^2}{n^2}\right).$$

Le flux total à travers la bobine est, par suite,

$$\mathfrak{N} = 2 \cdot \mathcal{H}\pi R^2 \left\{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \left(1 - \frac{3^2}{n^2}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{\overline{n-1}^2}{n^2}\right)\right\}$$

$$= 2\mathcal{H}\pi R^2 \left\{\frac{n}{2} - \frac{1}{n^2}\left(1 + 3^2 + 5^2 + \ldots + \overline{n-1}^2\right)\right\}.$$

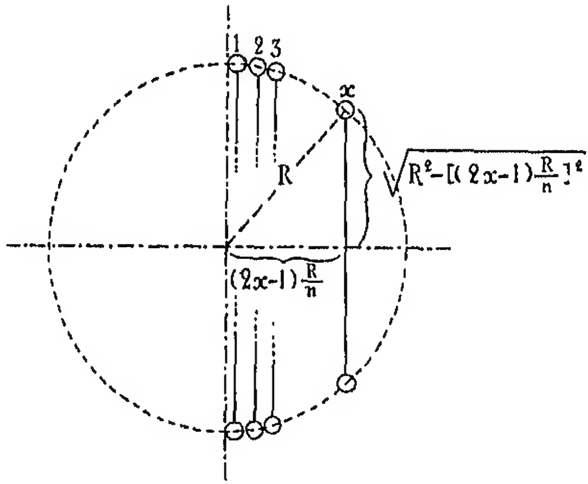

Fig. 49.

Puisque la somme des carrés des m premiers nombres impairs est $\frac{m(2m-1)(2m+1)}{3}$ et que la série entre parenthèses dans l'expression précédente correspond à $m = n/2$, il vient

$$\mathfrak{N} = 2\mathcal{H}\pi R^2 \left\{\frac{n}{2} - \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\frac{n}{2}(n-1)(n+1)}{3}\right\} = 2\mathcal{H}\pi R^2 \frac{2n^2+1}{6n}$$

$$= 2 \cdot \frac{4}{3}\pi \frac{ni}{R} \cdot \pi R^2 \frac{2n^2+1}{6n} = \frac{4}{9}\pi^2(2n^2+1)Ri.$$

On déduit de là

$$\mathcal{L} = \frac{\mathfrak{N}}{i} = \frac{4}{9}\,\pi^2\,(2\,n^2 + 1)\,\mathrm{R}.$$

Si l'unité est négligeable devant $2\,n^2$, on peut poser

$$\mathcal{L} = \frac{8}{9}\,\pi^2\,n^2\,\mathrm{R}$$

et, dans ce cas,

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\mathrm{I}^2 = \frac{4}{9}\,\pi^2\,n^2\,\mathrm{R}\,\mathrm{I}^2.$$

Avec

$n = 200$ spires,

$\mathrm{R} = 10 \cdot 10^{-9} = 10^{-8}$ quadrant,

$\mathrm{I} = 1$ ampère,

on trouve

$$\mathrm{W} = \frac{4}{9} \cdot 3{,}14^2 \cdot 200^2 \cdot 10^{-8} \cdot 1^2 = 0{,}001\,75 \text{ joule}.$$

73. — *On relie une pile de force électromotrice constante à un conducteur dont le coefficient de self-induction est invariable. Quelles sont, par rapport à l'intensité de régime, les valeurs maxima, moyenne et efficace du courant pendant la durée, égale à la constante de temps du circuit, qui suit le moment de la fermeture de celui-ci? Et quels sont, au bout de cet intervalle, le pourcentage de l'énergie développée par la pile dissipé en chaleur et le pourcentage emmagasiné à l'état potentiel dans le champ magnétique du circuit?*

Soient E la force électromotrice de la pile, R, $\mathcal{L}$ et $\tau = \mathcal{L}/\mathrm{R}$ la résistance, le coefficient de self-induction et la constante de temps du circuit.

En désignant par I l'intensité de régime du courant, on a

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}.$$

A un instant t de la période variable de fermeture, l'intensité i du courant satisfait à la relation

$$i = \frac{E - \mathcal{L}\frac{di}{dt}}{R},$$

d'où l'on tire

$$\int_0^t dt = \mathcal{L}\int_0^i \frac{di}{E - iR}$$

ou, en intégrant,

$$t = -\frac{\mathcal{L}}{R}\log_e \frac{E - iR}{E}$$

et, par suite,

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{\mathcal{L}}}\right) = I\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

On voit que le courant croît d'une manière continue de zéro vers la valeur de régime. Son intensité maxima i_{max} pendant l'intervalle de temps τ qui suit la fermeture du circuit est donc atteinte à la fin de cette durée, de sorte que

$$i_{max} = I\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = I\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

Il en résulte que

$$\frac{i_{max}}{I} = \frac{e - 1}{e} = \frac{2,718 - 1}{2,718} = 0,633.$$

L'intensité moyenne du courant pendant l'intervalle τ est

$$i_{moy} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau i\,dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau I\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)dt$$

$$= \frac{I}{\tau}\left\{\Big[t\Big]_0^\tau + \tau\Big[e^{-\frac{t}{\tau}}\Big]_0^\tau\right\} = \frac{I}{e}.$$

Par conséquent,

$$\frac{i_{\text{moy}}}{\text{I}} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2,718} = 0,368.$$

Pour le carré de l'intensité efficace du courant pendant l'intervalle τ, il vient

$$(i_{\text{eff}})^2 = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau i^2\,dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \text{I}^2\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 dt$$

$$= \frac{\text{I}^2}{\tau}\left\{\int_0^\tau dt - 2\int_0^\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\,dt + \int_0^\tau e^{-\frac{2t}{\tau}}\,dt\right\} = \text{I}^2\,\frac{4e - e^2 - 1}{2e^2}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{i_{\text{eff}}}{\text{I}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,718 - \overline{2,718}^2 - 1}{2 \cdot \overline{2,718}^2}} = \sqrt{0,168} = 0,41.$$

L'énergie fournie par la pile pendant le temps τ s'élève à

$$\text{E}\,i_{\text{moy}}\,\tau = 0,368\ \text{E I}\tau.$$

L'énergie dissipée par effet Joule pendant ce temps est

$$(i_{\text{eff}})^2\,\text{R}\tau = 0,168\ \text{I}^2\text{R}\tau = 0,168\ \text{E I}\tau,$$

et celle emmagasinée dans le champ magnétique

$$\frac{1}{2}\,\mathcal{L}\,(i_{\text{max}})^2 = \frac{\overline{0,633}^2}{2}\,\mathcal{L}\,\text{I}^2 = 0,2\ \text{I}^2\text{R}\tau = 0,2\ \text{E I}\tau.$$

En conséquence,

$$\frac{(i_{\text{eff}})^2\,\text{R}\tau}{\text{E}\,i_{\text{moy}}\,\tau} = \frac{0,168}{0,368},\ \text{soit } 45,7\ \%,$$

et

$$\frac{\frac{1}{2}\,\mathcal{L}\,(i_{\text{max}})^2}{\text{E}\,i_{\text{moy}}\,\tau} = \frac{0,2}{0,368},\ \text{soit } 54,3\ \%.$$

74. — *Si, pour interrompre le courant qui traverse un enroulement AB soumis à une différence de potentiel constante V de 500 volts et dont le coefficient de self-induction $\mathcal{L}$ est invariable, on manœuvre une clef C reliant cet enroulement à un rhéostat non-*

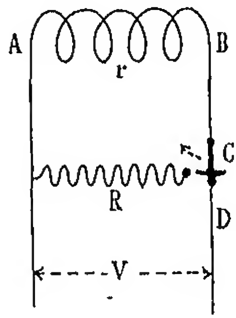

Fig. 50.

inductif R au moment où elle quitte le fil d'alimentation D, fig. 50, à quelle valeur peut théoriquement s'élever la tension aux bornes de l'enroulement, lorsque le rhéostat présente une résistance 1°) égale à celle r de ce dernier, 2°) moitié moindre et 3°) décuple ?

Au temps t de la période variable, l'intensité i de l'extra-courant de rupture, qui se ferme à travers la résistance $(r + R)$, satisfait à l'équation

$$i = \frac{-\mathcal{L}\frac{di}{dt}}{r + R},$$

d'où l'on tire, dans l'hypothèse d'une commutation sans étincelle,

$$\int_0^t dt = -\frac{\mathcal{L}}{r + R}\int_{\frac{V}{r}}^{i} \frac{di}{i},$$

soit

$$t = -\frac{\mathcal{L}}{r + R}\log_e \frac{i}{V/r}$$

ou

$$i = \frac{V}{r} e^{-\frac{r+R}{\mathcal{L}} t}.$$

La différence de potentiel instantanée aux bornes de l'enroulement

$$v = i\,R = \frac{R}{r} V e^{-\frac{r+R}{\mathcal{L}} t}$$

atteint alors, au moment $t = 0$, pour lequel $e^{-(r+R)\,t/\mathcal{L}} = 1$, la valeur maxima

$$V_0 = \frac{R}{r} V.$$

Quand $V = 500$ volts, il vient

$$V_0 = 500,\ 250 \text{ ou } 5\,000 \text{ volts},$$

suivant que

$$R = r,\ \frac{r}{2} \text{ ou } 10\,r.$$

75. — *Quelle capacité faut-il dériver sur un rhéostat non-inductif de $R = 1000$ ohms pour qu'en reliant l'ensemble à une pile, dont la résistance ρ vaut 100 ohms, le courant s'établisse dans le rhéostat de la même manière que si celui-ci présentait un coefficient de self-induction constant $\mathcal{L}$ égal à 1 henry?*

Soit E la force électromotrice de la pile.

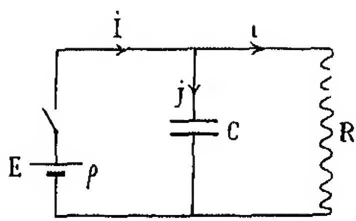

Fig. 51.

Dans le cas d'un rhéostat sans self-induction, shunté par une capacité C, si i, j et I désignent, fig. 51, les intensités

instantanées des courants dans le rhéostat, dans la branche du condensateur et dans celle de la pile, on a, à un moment quelconque t après la fermeture de la clef de la pile, les relations

$$I = i + j,$$
$$E = I\rho + iR$$

et

$$j = CR\frac{di}{dt},$$

d'où l'on tire, en substituant à I et j, dans la première, leurs valeurs données par les deux autres,

$$\frac{E - iR}{\rho} = i + CR\frac{di}{dt}$$

ou

$$dt = CR\rho\frac{di}{E - i(R + \rho)}. \qquad (1)$$

En l'absence de condensateur, le courant i s'établissant dans le rhéostat, supposé inductif, satisfait à la relation

$$i = \frac{E - \mathcal{L}\frac{di}{dt}}{R + \rho}$$

ou

$$dt = \mathcal{L}\frac{di}{E - i(R + \rho)}. \qquad (2)$$

On voit que les équations différentielles (1) et (2) définissent des périodes variables identiques quand

$$CR\rho = \mathcal{L}.$$

La capacité requise est donc

$$C = \frac{\mathcal{L}}{R\rho}.$$

Avec

$\mathcal{L} = 1$ henry,
$R = 1000$ ohms,
$\rho = 100$ ohms,

on trouve

$$C = \frac{1}{1\,000 \,.\, 100} = 10^{-5} \text{ farad.}$$

76. — *Comment varient le courant de charge et la différence de potentiel des armatures d'un condensateur, de capacité $C = 1 \,.\, 10^{-6}$ farad, relié à une pile, de force électromotrice invariable E égale à 100 volts, par l'intermédiaire d'un enroulement dont le coefficient de self-induction constant $\mathcal{L}$ vaut 1 henry, dans l'hypothèse d'une résistance nulle de tous les conducteurs?*

Soient i et v l'intensité du courant de charge et la différence de potentiel des armatures au temps t, compté à partir du moment du raccordement de la pile :

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

et, en l'absence de résistance,

$$E - v - \mathcal{L} \frac{di}{dt} = 0.$$

Si, dans la dernière égalité dérivée par rapport à t, on remplace dv/dt par son expression tirée de la première, il vient

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{\mathcal{L}C} = 0.$$

Pour obtenir l'intégrale générale de cette équation différentielle linéaire, sans second membre et à coefficient constant, il faut y remplacer i par e^{mt}, ce qui l'amène à la forme

$$e^{mt}\left(m^2 + \frac{1}{\mathcal{L}C}\right) = 0,$$

chercher les valeurs m_1 et m_2 de m qui annulent le binome entre parenthèses, et introduire ces racines dans l'expression

$$i = A e^{m_1 t} + B e^{m_2 t},$$

où A et B sont des constantes d'intégration à déterminer par les conditions aux limites.

Comme les valeurs

$$m_1 = + \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}C}} \sqrt{-1}$$

et

$$m_2 = - \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}C}} \sqrt{-1}$$

sont imaginaires et conjuguées, on peut écrire, en se servant des formules d'Euler,

$$i = (A + B) \cos \frac{t}{\sqrt{\mathcal{L}C}} + (A - B) \sqrt{-1} \sin \frac{t}{\sqrt{\mathcal{L}C}}$$

$$= M \cos \frac{t}{\sqrt{\mathcal{L}C}} + N \sin \frac{t}{\sqrt{\mathcal{L}C}}.$$

Par suite,

$$v = E - \mathcal{L} \frac{di}{dt} = E + M \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{C}} \sin \frac{t}{\sqrt{\mathcal{L}C}} - N \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{C}} \cos \frac{t}{\sqrt{\mathcal{L}C}}.$$

Au temps $t = 0$, $i = 0$ et $v = 0$. D'où les relations

$$0 = M$$

et

$$0 = E - N \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{C}},$$

qui déterminent M et N.

Les expressions instantanées du courant et de la différence de potentiel se réduisent ainsi à

$$i = E \sqrt{\frac{C}{\mathcal{L}}} \sin \frac{t}{\sqrt{\mathcal{L}C}}$$

et

$$v = E \left(1 - \cos \frac{t}{\sqrt{\mathcal{L}C}} \right).$$

Le courant de charge est donc alternatif et son intensité change sinusoïdalement, avec la fréquence

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mathcal{L}C}},$$

en acquérant dans l'un et l'autre sens l'amplitude

$$I_0 = E\sqrt{\frac{C}{\mathcal{L}}},$$

tandis que la différence de potentiel des armatures conserve un sens constant, en variant de grandeur sinusoïdalement, avec la même fréquence, autour de la valeur moyenne E, entre des minima nuls et des maxima $E_0 = 2E$, fig. 52.

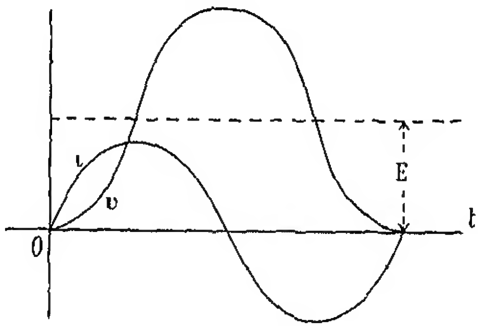

Fig. 52.

Avec les données numériques du problème, on trouve

$$f = \frac{1}{2 \,.\, 3{,}14\sqrt{1 \,.\, 1 \,.\, 10^{-6}}} = 159 \text{ périodes par seconde},$$

$$I_0 = 100\sqrt{\frac{1 \,.\, 10^{-6}}{1}} = 0{,}1 \text{ ampère}$$

et

$$E_0 = 2 \,.\, 100 = 200 \text{ volts}.$$